九十九學年度四技二專統一入學測驗 數學(C) 試題

1. 關於直線 L：$x+4y=28$，下列敘述何者正確？
(A)斜率為 7 (B)y 截距為 7 (C)通過點(7 , 7) (D)x 截距為 7。

2. 關於抛物線 P：$x=4y^2+8y$，下列敘述何者正確？
(A)開口向下 (B)頂點在$(-4,-1)$ (C)準線是 $y=-1$ (D)正焦弦長為 4。

3. 下列各三角函數值，何者數值最小？
(A)$\sin 885^\circ$ (B)$\cos(-430^\circ)$ (C)$\tan 131^\circ$ (D)$\sin(-2010^\circ)$。

4. 在坐標平面上的平行四邊形 ABCD(按順序)中，若 $\overrightarrow{AB}=(4,8)$、$\overrightarrow{AD}=(1,4)$，則$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=$？
(A)$4\sqrt{5}+\sqrt{17}$ (B)18 (C)$8\sqrt{5}+2\sqrt{17}$ (D)36。

5. 設三直線 L_1：$x+3y-2=0$，L_2：$3x+y+2=0$，L_3：$x-y-2=0$，且 L_1 與 L_2 相交於 A 點，則過 A 點且與 L_3 平行的直線，不通過那一個象限？
(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限。

6. 已知直線 L：$3x+4y+5=0$ 與圓 C：$x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 兩者的交點個數為 a，且圓 C 的圓心到直線 L 的距離為 b，則下列何者為正確？
(A)$a-b=-3$ (B)$a-b=-1$ (C)$a+b=4$ (D)$a+b=5$。

7. 設 p 與 q 為方程式 $\log_9(10x^2-6x+5)-\log_3 x-1=0$ 的兩根，則 $\dfrac{1}{p+q}=$？
(A)$\dfrac{1}{6}$ (B)$\dfrac{1}{5}$ (C)$\dfrac{2}{3}$ (D)$\dfrac{5}{7}$。

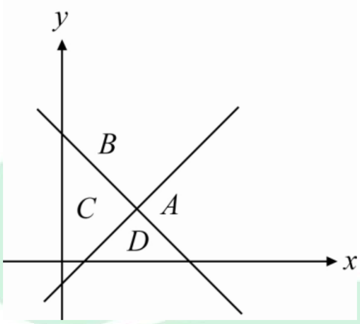
8. 有一籃球隊共有 12 位選手，其前鋒、中鋒、後衛的人數分別為 4 人、3 人、5 人，現在要選 5 位選手上場比賽，一般籃球比賽中，每隊的前鋒、中鋒、後衛人數分別為 2 人、1 人、2 人，問共有幾種不同選法？
(A)120 (B)154 (C)180 (D)225。

9. 中山高中一、二、三年級學生人數的比例分別為 40 %、32 %、28 %，而一、二、三年級男生人數佔該年級的比例分別為 50 %、60 %、40 %，現從全校學生中任意選取 1 人，則此人為女生的機率為何？
(A)43.2 % (B)45.4 % (C)47.8 % (D)49.6 %。

10. 已知函數 $f(x)=x^2-3x+5$ 與函數 $g(x)=|2x+1|$圖形相交於兩點，而其 x 坐標分別為 a 與 b，其中 $a<b$。若 $f'(x)$與 $g'(x)$在$[a,b]$上的最小值分別為 m_1 與 m_2，則 $m_1+m_2=$？
(A)-2 (B)-1 (C)0 (D)1。

11. 聯立不等式$\begin{cases} x+y\geqq 10 \\ x-y\leqq 1 \end{cases}$的可行解區域是圖(一)的哪一個部分？

(A)A　(B)B　(C)C　(D)D。



圖(一)

12. 設 f(x)在[a , b]上為一連續函數，其中 a＜b，則下列敘述何者錯誤？

(A)$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(B)$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$，其中 k 為任意常數

(C)若 a＜b＜c，則$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

(D)$\int_a^b x^n dx=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$，其中 n 為任意常數。

13. 在擲單顆骰子遊戲中，若甲每投一次骰子要先付給乙 x 元，且出現點數為奇數時，乙需付給甲 10 元；出現點數為偶數時，乙需付給甲 40 元，但出現奇數點的機率為出現偶數點機率的 2 倍，則 x 應訂為多少元，此遊戲才是公平的？

(A)15　(B)20　(C)25　(D)30。

14. 設 A、B、C 為一圓之圓周上三點，若$\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=8$，則該圓之面積為何？

(A)$\frac{256}{15}\pi$　(B)$\frac{256}{13}\pi$　(C)$\frac{81}{4}\pi$　(D)$\frac{81}{2}\pi$。

15. 關於函數的導函數，下列何者正確？

(A)f(x)＝(4x＋5)(6x＋7)，則 f '(x)＝24

(B)$f(x)=\sqrt[3]{x^7}+4x$，則 $f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+4$

(C)$f(x)=(4x+5)^2$，則 f '(x)＝2(4x＋5)

(D)$f(x)=\frac{4x+4}{x+1}$，則 f '(x)＝4。

16. 關於下列各極限，何者正確？

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{5^n}=1$　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+9}{n^2+5n-1}=0$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0.01n}{5n-1}=0$　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}n-\sqrt{n^2-1}=1$。

17. 設 a、b、c、d 為實數，若 x^2-1 為 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 之因式，且 f(x)除以 $x-2$ 餘 6，則 $2a+b=$？

(A)-4　(B)-2　(C)2　(D)4。

18. 令 $i=\sqrt{-1}$。若 $1+i$ 為方程式 $2x^2+kx+6+2i=0$ 的一根，則 $k=$？

(A)-6　(B)-4　(C)$-5+i$　(D)$-10+2i$。

19. 無窮級數 $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^5}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2k}}+\dfrac{1}{3^{2k+1}}+\cdots=$？

(A)$\dfrac{41}{24}$　(B)$\dfrac{59}{24}$　(C)$\dfrac{5}{2}$　(D)$\dfrac{7}{2}$。

20. 設 r 為有理數，且 $5^r=4(\sqrt[3]{40}+\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2})^2$，則 $r=$？

(A)$\dfrac{8}{3}$　(B)$\dfrac{10}{3}$　(C)8　(D)10。

21. 在坐標平面上，若△ABC 之三頂點坐標分別為 A(2 , 0)、B(4 , 0)與 C(4 , 3)，則△ABC 之三邊上共有多少點與原點的距離恰為整數值？

(A)2 個　(B)4 個　(C)6 個　(D)8 個。

22. 在△ABC 中，若 D 點在線段 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD}:\overline{DC}=1:2$，又 $\angle BAD=30^\circ$，$\angle BDC=60^\circ$，則 $\angle DCB$ 的角度為何？

(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)75°。

23. 在△ABC 中，若 D 為線段 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overline{AB}=9$、$\overline{AC}=5$，則向量內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$？

(A)-28　(B)-14　(C)14　(D)28。

24. 設 f(x)為實係數三次多項式，若 $f(1)=f(1+i)=0$ 且 $f(0)>0$，則下列何者正確？

(A)$f(-2)<0$　(B)$f(2)>0$　(C)$f(4)<0$　(D)$f(6)=0$。

25. 求函數 $f(x)=(\cos x+3\sin x)(\cos x-\sin x)$之最小值為何？

(A)$-2\sqrt{5}$　(B)-4　(C)$-\dfrac{7}{2}$　(D)$-\sqrt{5}-1$。

【解答】

1.(B)　2.(B)　3.(C)　4.(B)　5.(D)　6.(C)　7.(A)　8.(C)　9.(D)　10.(D)
11.(B)　12.(CD)　13.(B)　14.(A)　15.(B)　16.(B)　17.(C)　18.(A)　19.(A)　20.(A)
21.(C)　22.(A)　23.(A)　24.(C)　25.(D)

九十九學年度四技二專統一入學測驗 數學(C) 試題詳解

1.(B)	2.(B)	3.(C)	4.(B)	5.(D)	6.(C)	7.(A)	8.(C)	9.(D)	10.(D)
11.(B)	12.(CD)	13.(B)	14.(A)	15.(B)	16.(B)	17.(C)	18.(A)	19.(A)	20.(A)
21.(C)	22.(A)	23.(A)	24.(C)	25.(D)					

1. L：$x+4y=28$

   (A)斜率為$-\dfrac{1}{4}$

   (B)過$(0, 7)\Rightarrow$ y 截距為 7

   (C)$(7, 7)$代入不滿足，故不過$(7, 7)$

   (D)過$(28, 0)\Rightarrow$ x 截距 28。

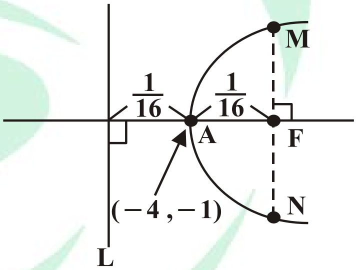
2. $x=4y^2+8y \Leftrightarrow 4(y^2+2y+1)=x+4 \Leftrightarrow (y+1)^2=4\times\dfrac{1}{16}(x+4)$

   (A)開口向右

   (B)頂點 $A(-4, -1)$

   (C)準線 L：$x=-4-\dfrac{1}{16}$，即 $16x+65=0$

   (D)正焦弦長$\overline{MN}=4(\dfrac{1}{16})=\dfrac{1}{4}$



3. $\sin 885^\circ=\sin(720^\circ+165^\circ)=\sin(180^\circ-15^\circ)=\sin 15^\circ$

   $\cos(-430^\circ)=\cos(360^\circ+70^\circ)=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$

   $\tan 131^\circ<0$

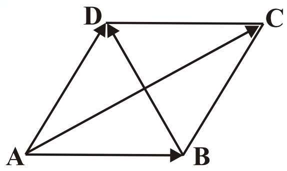
   $\sin(-2010^\circ)=\sin(-2010^\circ+2160^\circ)=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ$

   $\sin 30^\circ>\sin 20^\circ>\sin 15^\circ>0$，故知 $\tan 131^\circ$最小。

4. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(4, 8)+(1, 4)=(5, 12)$

   $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(1, 4)-(4, 8)=(-3, -4)$

   所求$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{5^2+12^2}+\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=13+5=18$



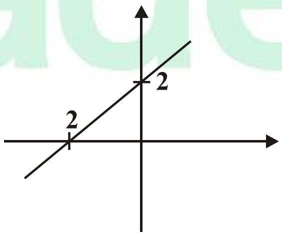
5. A：$\begin{cases} L_1: x+3y-2=0 \\ L_2: 3x+y+2=0 \end{cases}$，知 $A(-1, 1)$

   L_3：$x-y-2=0$，斜率為 1

   所求直線過 $A(-1, 1)$且斜率為 1

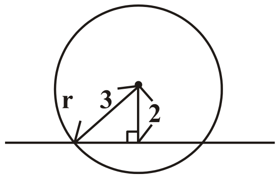
   即 $x-y=-2$

   如圖，不過第四象限



6. $C：x^2+y^2+2x-4y-4=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=3^2$

圓心 $O(-1,2)$，半徑 $r=3$，直線 $L：3x+4y+5=0$



$b=d(O,L)=\dfrac{|3(-1)+4(2)+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2<3=r$

L 與 C 交 2 點 $\Rightarrow a=2$，$a+b=2+2=4$

7. $\log_9(10x^2-6x+5)-\log_{3^2}x^2-\log_9 9=0$

即 $\log_9\dfrac{10x^2-6x+5}{9x^2}=0$，知 $\dfrac{10x^2-6x+5}{9x^2}=1$

即 $x^2-6x+5=0$，即 x 之二根 p、q 為 1，5(代回真數均滿足)

所求 $\dfrac{1}{p+q}=\dfrac{1}{6}$

8. 前鋒 4 人選 2 人 $\Rightarrow C_2^4=6$

中鋒 3 人選 1 人 $\Rightarrow C_1^3=3$

後衛 5 人選 2 人 $\Rightarrow C_2^5=10$，所求 $6\times3\times10=180$

9. 一、二、三年級學生人數佔全校比例分別為 40%、32%、28%

一、二、三年級男生佔該年級比例分別為 50%、60%、40%

故知一、二、三年級女生佔該年級比例分別為 50%、40%、60%

所求 $40\%\times50\%+32\%\times40\%+28\%\times60\%=\dfrac{4960}{10000}=49.6\%$

10. $\begin{cases} y=x^2-3x+5 \\ y=|2x+1| \end{cases}$ 解 x，即解 $x^2-3x+5=|2x+1|$

(1)當 $x\geqq-\dfrac{1}{2}$ 即解 $x^2-3x+5=2x+1$，可得 $x=1$ or $4\Rightarrow a=1$，$b=4$

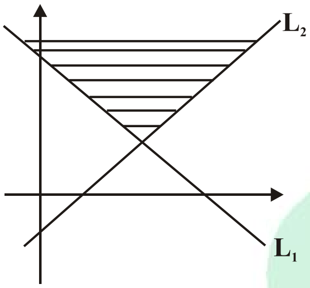
(2)當 $x<-\dfrac{1}{2}$ 即解 $x^2-3x+5=-2x+1$，無實根($\triangle<0$)

$f'(x)=2x-3$，在 $[a,b]=[1,4]$ 之最小值為 $2(1)-3=-1=m_1$

$g'(x)：\begin{cases} 2，x>-\dfrac{1}{2} \\ -2，x<-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在 $[a,b]=[1,4]$ 之最小值為 $2=m_2$

$m_1+m_2=(-1)+2=1$

11. 令 $x+y=10$ 為 L_1，知 $x+y\geqq 10$ 為 L_1 之右半平面(含 L_1)
令 $x-y=1$ 為 L_2，知 $x-y\leqq 1$ 為 L_2 之左半平面(含 L_2)



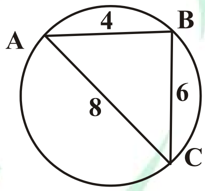
所求為 B 部份

12. $\int_a^b x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$，n 不為$-1$ 之任意常數。

13. $\begin{cases} P(奇)=2P(偶) \\ P(奇)+P(偶)=1 \end{cases}$ 知 $P(奇)=\frac{2}{3}$，$P(偶)=\frac{1}{3}$

若此遊戲為公平則 $x=\frac{2}{3}\times 10+\frac{1}{3}\times 40=20$

14. 由餘弦定理知 $\cos B=\frac{4^2+6^2-8^2}{2\times 4\times 6}=-\frac{1}{4}\Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$



由正弦定理知 $\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$(R 為△ABC 之外接圓半徑)

即 $\frac{8}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=2R$，知 $R=\frac{16}{\sqrt{15}}$，圓面積 $\pi R^2=\frac{256}{15}\pi$

15. (A) $f(x)=(4x+5)(6x+7)$，$f'(x)=4(6x+7)+6(4x+5)$，即 $f'(x)=48x+58$

(B) $f(x)=x^{\frac{7}{3}}+4x$，$f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+4$

(C) $f(x)=(4x+5)^2$，$f'(x)=2(4x+5)\times 4=8(4x+5)$

(D) $f(x)=\frac{4(x+1)}{x+1}=4$，$x\neq 1$

$f'(x)=0$，$x\neq 1$

16. (A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3^n}{5^n}-\dfrac{2^n}{5^n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3}{5})^n\times\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{5})^n=0-0=0$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+9}{n^2+5n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{100n}{n^2}+\dfrac{9}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{5n}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{0+0}{1+0-0}=0$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0.01n}{5n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0.01}{5-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{0.01}{5-0}=0.002$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})}{n+\sqrt{n^2-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n^2-1)}{n+\sqrt{n^2-1}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

17. $x^2-1=(x-1)(x+1)$

$(x-1)(x+1)\mid f(x)\Leftrightarrow f(1)=0$ 且 $f(-1)=0$

$f(x)$除以 $x-2$ 餘 $6\Leftrightarrow f(2)=6$

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c+d=0\ldots(1) \\ f(-1)=-a+b-c+d=0\ldots(2) \\ f(2)=8a+4b+2c+d=6\ldots(3) \end{cases}$$

$(1)+(2)\Rightarrow b+d=0$

$(1)-(2)\Rightarrow a+c=0$

$d=-b$，$c=-a$ 代入$(3)\Rightarrow 8a+4b+2(-a)+(-b)=6$

即 $6a+3b=6$，即 $2a+b=2$

18. $1+i$ 為 $2x^2+kx+6+2i=0$ 之一根

設另一根為β，由二根積知$\beta(1+i)=\dfrac{6+2i}{2}=3+i$

即$\beta=\dfrac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{4-2i}{2}=2-i$

由二根和知$(1+i)+(2-i)=-\dfrac{k}{2}$，即 $k=-6$

19. $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^5}+\cdots+(\dfrac{1}{4})^k+\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{9})^k+\cdots$

$=(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\cdots)+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{243}+\cdots)$

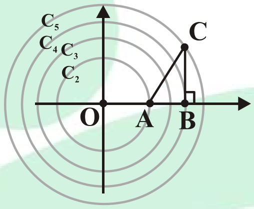
$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}}+\dfrac{\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{41}{24}$

20. $4(\sqrt[3]{40}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2=4(2\sqrt[3]{5}+\frac{1}{2}\times\sqrt[3]{5})^2=2^2(\frac{5}{2}\sqrt[3]{5})^2$

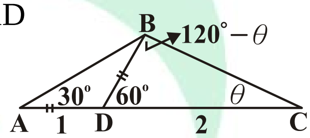
$=[2\times\frac{5}{2}\sqrt[3]{5}]^2=(5\times 5^{\frac{1}{3}})^2=(5^{\frac{4}{3}})^2=5^{\frac{8}{3}}=5^r$，即 $r=\frac{8}{3}$

21. $A(2,0)$、$B(4,0)$、$C(4,3)$、$O(0,0)$、$\overline{OA}=2$、$\overline{OB}=4$、$\overline{OC}=5$

C_2、C_3、C_4、C_5 表以 O 為圓心，分別以 2、3、4、5 為半徑之圓，此四個圓與△三邊計交 6 個點，表△三邊上有 6 個點至原點(0 , 0)之距離為整數。



22. 由$\angle BDC=60^\circ$且$\angle BAD=30^\circ$，知$\angle ABD=30^\circ\Rightarrow\overline{BD}=\overline{AD}$

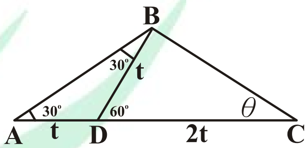


由正弦定理△DBC 中 $\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}}=\frac{\sin(120^o-\theta)}{\sin\theta}=\frac{2}{1}$

即 $2\sin\theta=\sin120^\circ\cos\theta-\sin\theta\cos120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$

知 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，知 $\theta=30^\circ=\angle DCB$

《另解》



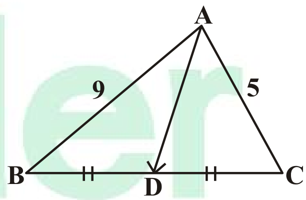
$\angle BDC=60^\circ$又$\angle BAD=30^\circ\Rightarrow\angle ABD=30^\circ\Rightarrow\overline{BD}=\overline{AD}$

設$\overline{DC}=2t$，$\overline{AD}=t\Rightarrow\overline{BD}=t$

△BCD 中$\overline{BC}^2=(2t)^2+t^2-2(2t)(t)\times\cos60^\circ=3t^2\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{3}\,t$

又$\frac{\sin\theta}{t}=\frac{\sin60^o}{\sqrt{3}t}\Rightarrow\sin\theta=\sin\angle BCD=\frac{1}{2}$，知$\theta=30^\circ$($150^\circ$不合)。

23. $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$



$=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})]$

$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)=\frac{1}{2}(25-81)=-28$

24. f(x)為實係數多項式，且 $f(1+i)=0$，知 $f(1-i)$亦為 0

$x=1\pm i \Leftrightarrow x-1=\pm i \Leftrightarrow x^2-2x+1=-1 \Leftrightarrow x^2-2x+2=0$

即 $x^2-2x+2 \mid f(x)$，又 $f(1)=0$，即 $x-1 \mid f(x)$

可設 $f(x)=k(x-1)(x^2-2x+2)$，但 $f(0)=-2k>0$，即 $k<0$

$f(-2)>0$，$f(2)<0$，$f(4)<0$，$f(0)<0$

註：$\because x^2-2x+2$ 恆正，$(x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$，$\forall x\in R)$

當 $x>1$ 時 $f(x)<0$；$x<1$ 時，$f(x)>0$；$f(x)=0$ 只有一實根即 1。

25. $f(x)=(\cos x+3\sin x)(\cos x-\sin x)$

$=\cos^2 x+2\sin x\cos x-3\sin^2 x$

$=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)+\sin 2x-\dfrac{3}{2}(1-\cos 2x)$

$=-1-2\cos 2x+\sin 2x$

Min 為 $-1-\sqrt{(-2)^2+(1)^2}=-1-\sqrt{5}$