九十九學年度四技二專統一入學測驗
數學 ⒝ 試題

1. 設 $3x^4+2x^2+1=(a+1)x^4+(b-1)x^3+(c+1)x^2+(d-3)x+(e+4)$，則 a＋b＋c ＋d＋e＝？
   (A)1　　　　　(B)2　　　　　(C)3　　　　　(D)4。

2. 已知平面上三點 A(2，1)，B(1，3)及 C(4，k)，若線段 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 垂直，則 k＝？
   (A)1　　　　　(B)2　　　　　(C)3　　　　　(D)4。

3. 設集合 A＝{a，b，c，d}，集合 B＝{x，y，z}。若集合 A 之子集合個數有 p 個，集合 B 之子集合個數有 q 個，則 p－q＝？
   (A)2　　　　　(B)4　　　　　(C)6　　　　　(D)8。

4. 求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}(3k-2)=$ ？
   (A)1320　　　　(B)1325　　　　(C)1330　　　　(D)1335。

5. 設 m，n 為正奇數，則 $(\sin m\pi)^2+(\cos\frac{n\pi}{2})^2=$ ？
   (A)0　　　　　(B)1　　　　　(C)2　　　　　(D)3。

6. 設 A(－1，2)，B(2，6)為坐標平面上兩點，且 C 為線段 $\overline{AB}$ 上一點，使得 $2\overline{AC}=3\overline{BC}$。求 A 與 C 兩點間之距離為何？
   (A)1　　　　　(B)2　　　　　(C)3　　　　　(D)4。

7. 若點 A($\sec\theta$，$\tan\theta$)在第四象限內，則角度 θ 為第幾象限角？
   (A)一　　　　　(B)二　　　　　(C)三　　　　　(D)四。

8. 設 $0<\theta<\pi$，若 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，則 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=$ ？
   (A)$\sqrt{2}$　　　　(B)$2\sqrt{2}$　　　　(C)$3\sqrt{2}$　　　　(D)$4\sqrt{2}$。

9. 若△ABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{3}:2$，則 $\sin A+\cos B+\sin C=$ ？
   (A)1　　　　　(B)2　　　　　(C)3　　　　　(D)4。

10. 若△ABC 中，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=2\sqrt{3}$，且∠A＝60°，則△ABC 之面積為何？
    (A)$2\sqrt{3}$　　　　(B)$4\sqrt{3}$　　　　(C)$6\sqrt{3}$　　　　(D)$8\sqrt{3}$。

11. 設 f(x)為 x 之多項式，且 f(x)除以$(x-1)^2$之餘式為 x＋1，則 f(x)除以 x－1 之餘式為何？
    (A)1　　　　　(B)2　　　　　(C)3　　　　　(D)4。

12. 已知 x≧0，y≧0 且 2x＋y≧20，求 x＋y＋6 之最小值為何？
    (A)16　　　　　(B)17　　　　　(C)18　　　　　(D)19。

13. 已知直線$L_1：3x-4y-3=0$，$L_2：2x-3y-13=0$，$L_3：x+y+1=0$，求L_2和L_3之交點到直線L_1之距離為何？

    (A)1　　　　　　(B)2　　　　　　(C)3　　　　　　(D)4。

14. 解方程式$16^x-4^x-2=0$，則x=？

    (A)$\dfrac{1}{8}$　　　　(B)$\dfrac{1}{4}$　　　　(C)$\dfrac{1}{2}$　　　　(D)1。

15. 求$\log_4\sqrt{8}+\log_9\sqrt{243}=$？

    (A)1　　　　　　(B)2　　　　　　(C)3　　　　　　(D)4。

16. 設$f(x)=3^x$，若$f(a)=1$且$f(b)=2$，則$f(a+b)=$？

    (A)1　　　　　　(B)2　　　　　　(C)3　　　　　　(D)4。

17. 設某生之考試成績，國文、英文及數學三科分別為 76、81 與 90。若三科權數分別為 3、2 及 x，且加權平均分數為 80 分，則 x＝？

    (A)1　　　　　　(B)2　　　　　　(C)3　　　　　　(D)4。

18. 擲一公正骰子三次。已知第一次擲出 6 點，求三次投擲中至少有二次擲出 6 點的機率為何？

    (A)$\dfrac{11}{36}$　　　　(B)$\dfrac{13}{36}$　　　　(C)$\dfrac{17}{36}$　　　　(D)$\dfrac{19}{36}$。

19. 求$(2x+y)^6$的展開式中，x^2y^4項之係數為何？

    (A)24　　　　　(B)30　　　　　(C)36　　　　　(D)60。

20. 有一排椅子，共有 5 個座位。今有甲、乙、丙、丁、戊共 5 人，各選一個位子坐，但甲、乙、丙三人必需相鄰，試問共有幾種坐法？

    (A)24　　　　　(B)30　　　　　(C)36　　　　　(D)60。

21. 設直線L與圓：$x^2+y^2+6x+4y=12$ 相切於點$(-6,2)$，則點$(1,1)$到直線L的距離為何？

    (A)2　　　　　　(B)3　　　　　　(C)4　　　　　　(D)5。

22. 設α，β為行列式方程式$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ x+1 & 2 & 4 \\ x^2+2 & 5 & 7 \end{vmatrix}=0$的兩個根，則$\alpha+\beta=$？

    (A)$\dfrac{-1}{2}$　　　　(B)$\dfrac{1}{2}$　　　　(C)$\dfrac{3}{2}$　　　　(D)$\dfrac{5}{2}$。

23. 求無窮等比級數$\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}+3}+\cdots=$？

    (A)$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　　　(B)$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　(C)$\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$　　　　(D)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

24. 設向量$\bar{a}=(\cos75°+\cos15°,\sin75°+\sin15°)$，則向量的長度$|\bar{a}|=$？

    (A)$\sqrt{3}$　　　　(B)2　　　　(C)$\sqrt{5}$　　　　(D)$\sqrt{6}$。

25. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2)$，$\vec{b} = (1, x)$，且向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{4}$，則 $x = ?$

(A)1　　　　　(B)2　　　　　(C)3　　　　　(D)4。

【解答】

  1.(D)   2.(B)   3.(D)   4.(D)   5.(A)   6.(C)   7.(D)   8.(B)   9.(B)   10.(C)

 11.(B) 12.(A) 13.(C) 14.(C) 15.(B) 16.(B) 17.(A) 18.(A) 19.(D) 20.(C)

 21.(D) 22.(A) 23.(D) 24.(A) 25.(C)

【詳解】

1. $\begin{matrix} a+1=3 & d-3=0 \\ b-1=0 & e+4=1 \\ c+1=2 & \end{matrix} \Bigg\} \begin{matrix} a=2 & d=3 \\ b=1 & e=-3 \\ c=1 & \end{matrix} \Bigg\} \to a+b+c+d+e=4$

2. $m_{\overline{AB}} = \dfrac{3-1}{1-2} = -2$ ，$m_{\overline{AC}} = \dfrac{k-1}{4-2} = \dfrac{k-1}{2}$

   $\because$ 垂直 $\to m_{\overline{AB}} \times m_{\overline{AC}} = -1 \to (-2)(\dfrac{k-1}{2}) = -1 \to k=2$

3. $p=2^4$，$q=2^3$，$p-q=16-8=8$

4. 原式 $= 3\sum\limits_{k=1}^{30} k - \sum\limits_{k=1}^{30} 2 = 3 \times \dfrac{(1+30)30}{2} - 2\times 30 = 1395 - 60 = 1335$

5. m為奇數：$\sin m\pi \to \sin\pi$，$\sin 3\pi$，$\sin 5\pi \cdots =0$

   n為奇數：$\cos\dfrac{n}{2}x \to \cos\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\dfrac{3}{2}\pi$，$\cos\dfrac{5}{2}\pi\cdots=0$

   原式 $= 0^2 + 0^2 = 0$

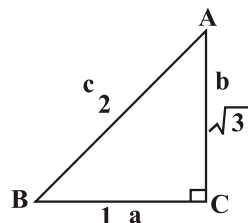6. $2\overline{AC} = 3\overline{BC} \to \overline{AC} : \overline{BC} = 3:2$

   $C(\dfrac{2(-1)+3\times2}{3+2}, \dfrac{2\times2+3\times6}{3+2}) = (-\dfrac{4}{5}, \dfrac{22}{5})$

   $\overline{AC} = \sqrt{(-1-\dfrac{4}{5})^2 + (2-\dfrac{22}{5})^2} = \sqrt{\dfrac{81}{25} + \dfrac{144}{25}} = \dfrac{15}{5} = 3$

7. $(\sec\theta, \tan\theta) \in IV \begin{cases} \sec\theta > 0 \\ \tan\theta < 0 \end{cases} \to \theta \in IV$

8. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{平方}} \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 2 \to \sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

   $\dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

9. $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{3} : 2 = a : b : c$

$\angle A = 30° \cdot \angle B = 60° \cdot \angle C = 90°$

$\sin A + \cos B + \sin C = \sin 30° + \cos 60° + \sin 90° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 1 = 2$

10. $\overline{BC} = a = \sqrt{6} \cdot \overline{AC} = b = 2\sqrt{3}$

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \rightarrow \dfrac{6}{\sin 60°} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B} \rightarrow \sin B = \dfrac{1}{2} \rightarrow \angle B = 30° \therefore \angle C = 90°$

面積 $= \dfrac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2} = 6\sqrt{3}$

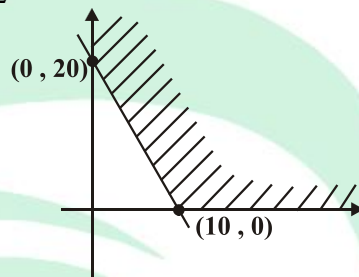11. $f(x) = (x-1)^2 Q(x) + (x+1) \rightarrow x = 1$ 代入 $f(1) = 2$

$f(x) \div (x-1)$ 之餘式為 $f(1) = 2$

12. $2x + y = 20$

x	10	0
y	0	20

令 $f(x, y) = x + y + 6$

$f(10, 0) = 16$

$f(0, 20) = 26 \rightarrow$ 最小值 $= 16$

(0 , 20)

(10 , 0)

13. $\begin{cases} 2x - 3y - 13 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ 聯立得 $\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -3 \end{aligned}$

$(2, -3)$ 至 $3x - 4y - 3 = 0$ 之距離為 $\dfrac{|3 \times 2 - 4(-3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{15}{5} = 3$

14. $(4^x)^2 - (4^x) - 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} 4^x & 11 \\ 4^x & -2 \end{matrix} \rightarrow (4^x + 1)(4^x - 2) = 0 \rightarrow 4^x = -1 (不合)，2 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

15. $\log_4 \sqrt{8} = \log_{2^2} 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} \log_2 2 = \dfrac{3}{4}$

$\rightarrow$ 原式 $= \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4} = 2$

$\log_9 \sqrt{243} = \log_{3^2} 3^{\frac{5}{2}} = \dfrac{\frac{5}{2}}{2} \log_3 3 = \dfrac{5}{4}$

16. $f(x) = 3^x$

$f(a) = 3^a = 1$

$f(b) = 3^b = 2$

$f(a+b) = 3^{a+b} = 3^a \times 3^b = 1 \times 2 = 2$

17. $\overline{X} = \dfrac{76 \times 3 + 81 \times 2 + 90 \times x}{3 + 2 + x} = 80 \rightarrow 390 + 90x = 400 + 80x \rightarrow x = 1$

18. A事件：第一次擲出 6 點

A∩B事件：第一次 6 點且三次中至少二次 6 點

$p(A) = \dfrac{1}{6} \times 1 \times 1 = \dfrac{1}{6}$

$p(A \cap B) = (\dfrac{1}{6})^3 + 2(\dfrac{1}{6})^2(\dfrac{5}{6}) = \dfrac{11}{216}$

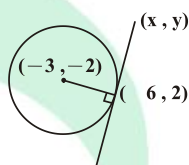| 一	二	三
6	6	非6
6	非6	6
6	6	6

$p(B \mid A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(6)} = \dfrac{\dfrac{11}{216}}{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{11}{36}$

19. $(2x+y)^6$ 中的 x^2y^4 項為 $C_4^6(2x)^2y^4 = 15 \times 2^2 x^2 y^4$ →係數為 $15 \times 4 = 60$

20. 甲乙丙、丁、戊 →$3! \times 3! = 6 \times 6 = 36$

21. 圓配方得：$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$

$(\dfrac{y-2}{x-(-6)})(\dfrac{2-(-2)}{-6-(-3)}) = -1 \rightarrow \dfrac{4(y-2)}{-3(x+6)} = -1$

切線 $3x - 4y + 26 = 0$，點 $(1,1)$ 至切線之 $d = \dfrac{|3 \times 1 - 4 \times 1 + 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{25}{5} = 5$

22. 行列式展開：$28 + 30(x+1) + 16(x^2+2) - 12(x^2+2) - 40 - 28(x+1) = 0$

→$4(x^2+2) + 2(x+1) - 12 = 0$ →$4x^2 + 2x - 2 = 0$

→$2x^2 + x - 1 = 0$ →$(x+1)(2x-1) = 0$

→$x = -1 \text{ or } \dfrac{1}{2}$ →$\alpha + \beta = (-1) + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

23. $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ 、$r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$S = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

24. $|\vec{a}| = \sqrt{(\cos 75^\circ + \cos 15^\circ)^2 + (\sin 75^\circ + \sin 15^\circ)^2}$

$= \sqrt{\cos^2 75^\circ + 2\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \cos^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + 2\sin 75^\circ \sin 15^\circ + \sin^2 15^\circ}$

$= \sqrt{2 + 4\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \sqrt{2 + 4(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})}$

$= \sqrt{2 + \dfrac{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2}{4}} = \sqrt{3}$

25. $\vec{a} = (-1, 2)$ $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2} = \sqrt{5}$

$\vec{b} = (1, x)$ $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 1}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 1 + 2x = 2x - 1$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{4}$

$\rightarrow 2x - 1 = \sqrt{5}\sqrt{x^2 + 1} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\xrightarrow{\text{平方}} 4x^2 - 4x + 1 = \dfrac{5x^2 + 5}{2}$

$\rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0$

$\rightarrow (3x + 1)(x - 3) = 0$

$\rightarrow x = 3 \text{ or } -\dfrac{1}{3} (\text{不合})$