113 學年度四技二專統一入學測驗
數學 (C) 試題

數學(C)參考公式

1.點 $P(x_0, y_0)$到直線 L：$ax+by+c=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2.算幾不等式：若 $a\geqq 0$，$b\geqq 0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

3.$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

4.$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

5.拋物線方程式$(x-h)^2=4c(y-k)$，其中頂點為(h, k)，焦點為$(h, k+c)$，準線為 $y=k-c$，正焦弦長為 $4|c|$

6.三角函數的二倍角公式：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

7.若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 為空間中兩非零向量，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為$\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$

8.$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

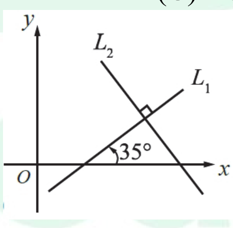
9.參考數值：$\sqrt[4]{2}\approx 1.189$、$\sqrt[3]{2}\approx 1.260$、$\sqrt{2}\approx 1.414$

1. 若 $\dfrac{5}{(2x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x-2}$，其中 A、B 為實數，則 $3A+2B=$？

   (A)-7　(B)-6　(C)-5　(D)-4。

2. 設直線 L_1 的斜角為 35°，已知直線 L_2 與 L_1 相互垂直，如圖(一)所示，則 L_2 的斜角為何？

   (A)35°　(B)55°　(C)125°　(D)155°。



圖(一)

3. 若 $180^\circ<\theta<270^\circ$ 且 $\sin\theta=\sin 2024^\circ$，則 $\theta=$？

   (A)204°　(B)214°　(C)224°　(D)234°。

4. 已知直線 L：$y=x-5$ 與圓 C 相切，且圓 C 的圓心為$(3, -4)$，則圓 C 的半徑為何？

   (A)$\sqrt{2}$　(B)$2\sqrt{2}$　(C)$3\sqrt{2}$　(D)$4\sqrt{2}$。

5. 已知二元一次方程組的增廣矩陣為$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$，則下列何者為此矩陣經過列運算操作後的增廣矩陣？

(A)$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$　(B)$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$　(C)$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right]$　(D)$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{array}\right]$。

6. 已知 $\sin\theta\tan\theta<0$ 且 $\cos\theta\cot\theta>0$，則 θ 為第幾象限角？

(A)一　(B)二　(C)三　(D)四。

7. 小輝從大賣場採買一些要祭拜祖先的水果，計有西瓜、芒果、蘋果、香瓜、橘子 及木瓜等六種水果，他從中各取出一顆水果置於供桌準備祭拜，發現供桌大小只能容納其中五顆水果排成一列放置，若其中香瓜及木瓜都被選到，且此兩種水果位置相鄰，則有幾種不同排列方法？

(A)48　(B)96　(C)192　(D)240。

8. 若點(a , b)落在第一象限且滿足 $b=-a^2+10$，則 a^2b 的最大值為何？

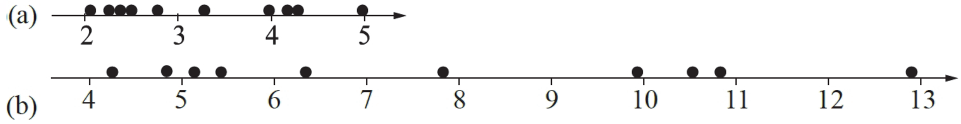
(A)10　(B)21　(C)23　(D)25。

9. 在工程領域中，矩陣運算可用來描述系統的輸入與輸出之關聯性。已知$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$分別表示系統輸入與輸出的變量，且彼此滿足下列關係：$\begin{cases} y_1=2x_1+5x_2 \\ y_2=3x_1+8x_2 \end{cases}$。若此關係可用矩陣運算 $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$表示，其中 A 為二階方陣。設 A 的反方陣為 $A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$？

(A)2　(B)1　(C)-1　(D)-2。

10. 在生成式人工智慧技術中，利用函數變換的概念可將資料的分布狀態作轉換。若有十筆原始資料 x(以• 表示)分布在區間[2 , 5]，如圖(二)(a)，現將此十筆資料經線型函數 f(x)變換後，其分布區間為[4 , 13]，如圖(二)(b)，則下列何者可為達成任務的 f(x)？

(A)$f(x)=2x+4$　(B)$f(x)=4x-4$　(C)$f(x)=3x-2$　(D)$f(x)=2x-3$。



圖(二)

11. 若實係數多項式函數 $f(x)=ax^4+bx^2-2x+c$，其導函數為 $f'(x)=8x^3-6x+d$ 且 $f(1)=5$，則 $a+b+c+d=$？

(A)11　(B)9　(C)7　(D)5。

12. 化簡$(\frac{1}{\sqrt{2}+1}-1)[(\frac{1}{\sqrt{2}+1})^2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+1]=$？

(A)$6+5\sqrt{2}$　(B)$8-5\sqrt{2}$　(C)$6-5\sqrt{2}$　(D)$-8+5\sqrt{2}$。

13. 已知 $a>0$，拋物線 $y=ax^2$ 的正焦弦 $\overline{F_1F_2}$ 長度為 8，且其頂點為 V，則 $\triangle VF_1F_2$ 的面積為何？

(A)8　(B)16　(C)24　(D)32。

14. 若 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1，0\leqq x<1\\ x^2+x，1\leqq x\leqq 2\end{cases}$，則 $\int_0^2 f(x)dx=$？

(A)$\frac{9}{2}$　(B)$\frac{11}{2}$　(C)$\frac{13}{2}$　(D)$\frac{19}{3}$。

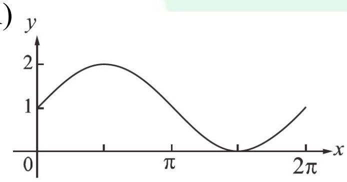
15. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2-n}{n+1}-\frac{n^2+3n}{n+2})=$？

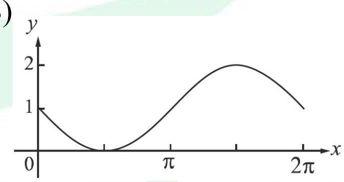
(A)0　(B)-1　(C)-2　(D)-3。

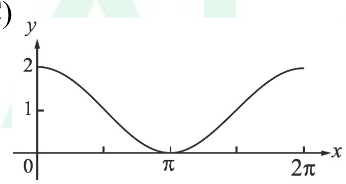
16. 若 $\log x=-2.24$，$\log y=9.28$，則 x^2y 落在下列哪個區間？

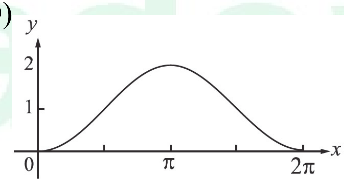
(A)$(10^3, 10^4)$　(B)$(10^4, 10^5)$　(C)$(10^5, 10^6)$　(D)$(10^6, 10^7)$。

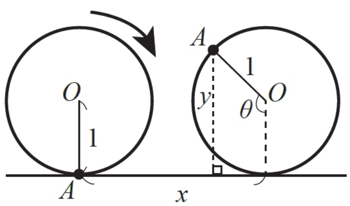
17. 有一個在水平地面上的圓形輪子，其半徑為 1 單位長。輪子上 A 點與地面接觸，如圖(三)所示，當輪子向右滾動，相對於圓心 O 而言，A 點以順時針轉動 θ 角，且輪子中心 O 前進 x 單位長的時候，A 點距離地面的高度為 y 單位長。在坐標平面上，若在 $0\leqq x\leqq 2\pi$ 的範圍中，y 可以表示為 x 的函數 f(x)，則下列圖形何者為 $y=f(x)$的圖形？

(A)


(B)


(C)


(D)




圖(三)

18. 若θ為一標準位置角，$i=\sqrt{-1}$。已知$\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}i$與$\frac{-1}{2}+(\sin\theta)i$為共軛複數，則$\sin2\theta=$？

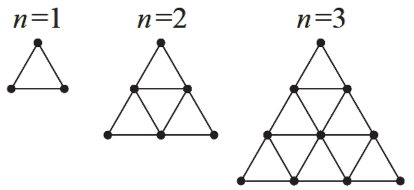
(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B)$\frac{-\sqrt{3}}{2}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{4}$　(D)$\frac{-\sqrt{3}}{4}$。

19. 空間中三點的坐標分別為A(0 , 6 , −1)、B(3 , 3 , −1)、C(4 , 1 , 1)，則$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{BC}$上的正射影為何？

(A)(4 , −4 , 2)　(B)(4 , −2 , 4)　(C)(2 , −4 , 4)　(D)(2 , 4 , 4)。

20. 小美想用火柴棒排成一個 n 層正三角形金字塔，例如當 n＝1、2、3 時，如圖(四)所示。若依此規則，則排出一個 50 層金字塔恰需要多少根火柴棒？

(A)3675　(B)3825　(C)7500　(D)7803。



圖(四)

21. 在坐標平面上，若△ABC 的三頂點坐標分別為A(−3 , 4)、B(−1 , 2)與C(3 , 6)，則△ABC 與其內部區域可由下列哪一組不等式表示？

(A)$\begin{cases}x-y+3\leqq 0\\x+y-1\geqq 0\\x-3y+15\geqq 0\end{cases}$　(B)$\begin{cases}x-y+3\geqq 0\\x+y-1\geqq 0\\x-3y+15\leqq 0\end{cases}$　(C)$\begin{cases}x-y+3\geqq 0\\x+y-1\leqq 0\\x-3y+15\geqq 0\end{cases}$　(D)$\begin{cases}x-y+3\leqq 0\\x+y-1\leqq 0\\x-3y+15\leqq 0\end{cases}$。

22. 根據建築物之耐震規範，某類鋼構造建築物之基本振動週期 T(單位為秒)之經驗公式為$T=0.085h^{\frac{3}{4}}$，其中 h 為地面到屋頂之高度(單位為公尺)。若 A、B 為兩棟屬於這類的鋼構造建築物，已知 A 的基本振動週期為 B 的 2 倍，且 B 的高度為 100 公尺，則 A 的高度約多少公尺？

(A)159　(B)168　(C)252　(D)283。

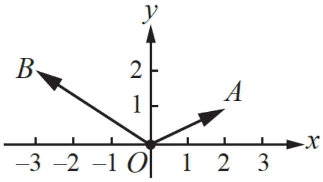
23. 下列哪一函數在 x＝1 的極限存在，但<u>不</u>連續？

(A)$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$　(B)$f(x)=\frac{1}{x-1}$　(C)$f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$　(D)$f(x)=(x-1)^2$。

24. 空間中兩點A(1 , 3 , 4)與B(3 , 2 , 4)，若 xy 平面上 P 點到 A 與 B 兩點的距離和為最小，則 P 點的坐標為何？

(A)$(2 , \frac{5}{2} , 0)$　(B)(2 , 2 , 0)　(C)$(2 , \frac{3}{2} , 0)$　(D)(3 , 1 , 0)。

(B)25. 在坐標平面上，已知 O 為原點，A(2 , 1)，B(-3 , 2)，如圖(五)所示，若 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OA}$，其中 $-1\leqq t\leqq 1$，則所有滿足 P 點所形成的線段長為多少？
(A)$3\sqrt{2}$ (B)$2\sqrt{5}$ (C)$3\sqrt{3}$ (D)$4\sqrt{2}$ 。



圖(五)

數學(C)－【解答】

1.(D) 2.(C) 3.(C) 4.(A) 5.(C) 6.(B) 7.(C) 8.(D) 9.(A) 10.(C)
11.(D) 12.(D) 13.(A) 14.(B) 15.(D) 16.(B) 17.(D) 18.(B) 19.(C) 20.(B)
21.(A) 22.(C) 23.(A) 24.(A) 25.(B)

113 學年度四技二專統一入學測驗
數學(C) 試題詳解

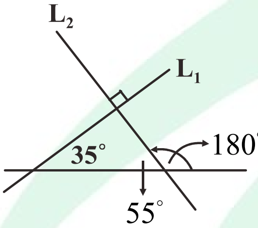
1.(D)	2.(C)	3.(C)	4.(A)	5.(C)	6.(B)	7.(C)	8.(D)	9.(A)	10.(C)
11.(D)	12.(D)	13.(A)	14.(B)	15.(D)	16.(B)	17.(D)	18.(B)	19.(C)	20.(B)
21.(A)	22.(C)	23.(A)	24.(A)	25.(B)					

1. $\dfrac{5}{(2x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x-2}=\dfrac{A(x-2)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}$

   $5=A(x-2)+B(2x+1)$ $\Rightarrow x=2$ 代入 $5=5B$ $\Rightarrow B=1$

   $\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ 代入 $5=-\dfrac{5}{2}A$ $\Rightarrow A=-2$

   $3A+2B=3(-2)+2\times1=-4$

2. 

   $180^\circ-55^\circ=125^\circ$ $\Rightarrow L_2$

3. $\sin2024^\circ=\sin(1800^\circ+224^\circ)=\sin224^\circ$ $\Rightarrow \theta=224^\circ$

4. 圓心$(3,-4)$到 $x-y-5=0$ 的距離為 d

   $d=\dfrac{|3-(-4)-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ＝半徑

5. $\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{array}\right]\times1 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 7\end{array}\right]$

6. $\left.\begin{array}{l}\sin\theta\tan\theta<0 \Rightarrow 則\ \theta\in \text{II III}\\ \cos\theta\cot\theta>0 \Rightarrow 則\ \theta\in \text{I II}\end{array}\right\}\therefore \theta\in \text{II}$

7. 香瓜、木瓜以外 $\Rightarrow C^4_3$

   香、木 ○○○ $\Rightarrow C^4_3\times4!\times2!=4\times24\times2=192$

8. $b=-a^2+10$ $\Rightarrow a^2=-b+10$

   代入 $a^2b=(-b+10)^2\times b=-b^2+10b=-(b^2-10b)$

   $=-(b-5)^2+25$，當 $b=5$ 時，最大值為 25

9. $\begin{cases} y_1=2x_1+5x_2 \\ y_2=3x_1+8x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

則 $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{2\times 8-3\times 5}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$a=8$，$b=-5$，$c=-3$，$d=2$，$a+b+c+d=2$

10. 設線性函數為 $y=f(x)=ax+b$

第一點(2.0⋯ , 4.2⋯)代入，則只有(B)(C)合

再將第十點(4.9⋯ , 12.9⋯)代入 $\Rightarrow$ 則只有(C)合

11. $f(x)=ax^4+bx^2-2x+c$，$f'(x)=4ax^3+2bx-2=8x^3-6x+d$

$\left.\begin{array}{l} 4a=8 \Rightarrow a=2 \\ 2b=-6 \Rightarrow b=-3 \\ d=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x)=2x^4-3x^2-2x+c \\ f(1)=2-3-2+c=c-3=5 \Rightarrow c=8 \end{array}$

12. $\because (x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$

$\therefore$ 求值式 $=(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1})^3-1=(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2})^3-1=(\sqrt{2}-1)^3-1$

$=\sqrt{2}^3-3\sqrt{2}^2\cdot 1+3\sqrt{2}\times 1^2-1^3-1=2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1-1$

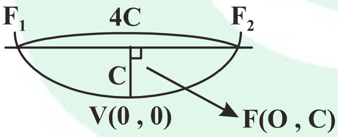
$=-8+5\sqrt{2}$

13. $y=ax^2 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{a}y$，$\dfrac{1}{a}=4C$

又 $a>0$ 且正焦弦長 $4|C|=8 \Rightarrow \dfrac{1}{a}=8 \Rightarrow a=\dfrac{1}{8} \Rightarrow$ 則 $C=2$

$\Rightarrow$ 焦點 F 為(0 , C)=(0 , 2)

頂點 V(0 , 0)



$\triangle VF_1F_2$ 面積 $=\dfrac{\overline{F_1F_2}\times C}{2}=\dfrac{8\times 2}{2}=8$

14. $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(\sqrt{x}+1)dx+\int_1^2(x^2+x)dx$

$=(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x)\Big|_0^1+(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2})\Big|_1^2=(\dfrac{2}{3}+1)-0+(\dfrac{8}{3}+2)-(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2})$

$=\dfrac{5}{3}+\dfrac{14}{3}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{38}{6}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{33}{6}=\dfrac{11}{2}$

15. 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-n)(n+2)-(n^2+3n)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3+2n^2-n^2-2n)-(n^3+3n^2+n^2+3n)}{(n+1)(n+2)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^2-5n}{n^2+3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3-\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=-3$

16. $\log x=-2.24 \quad \Rightarrow x=10^{-2.24}$

$\log y=9.28 \quad \Rightarrow y=10^{9.28}$

$x^2y=(10^{-2.24})^2\cdot 10^{9.28}=10^{-4.48+9.28}=10^{4.8} \quad \Rightarrow 10^4<10^{4.8}<10^5$

17. (1)$x=0$ 時 $y=0$

(2)$x=\pi$ 時，弧長 $r\theta=\pi \quad \Rightarrow 1\cdot\theta=\pi$，$\theta=\pi$ 為半圓周 $\quad\Rightarrow$ 此時 $y=2r=2$

(3)$x=2\pi$ 時，弧長 $r\theta=2\pi \quad \Rightarrow 1\cdot\theta=2\pi$，$\theta=2\pi$ 轉了一圈 $\quad\Rightarrow$ 此時 $y=0$

由(1)(2)(3)選(D)

18. $\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 和 $\dfrac{-1}{2}+\sin\theta i$ 為共軛複數

$\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{-1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad \Rightarrow \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(\dfrac{-1}{2})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

19. $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=(4,\ -5,2)\\ \overrightarrow{BC}=(1,\ -2,2)\end{cases} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影為

$\left(\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}\right)\overrightarrow{BC}$

$=\dfrac{4\times1+(-5)(-2)+2\times2}{(\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2})^2}\times(1,\ -2,2)=\dfrac{18}{9}(1,\ -2,2)=(2,\ -4,4)$

20. $n=1 \quad \Rightarrow a_1=3$

$n=2 \quad \Rightarrow a_2=3+3\times2=3(1+2)$

$n=3 \quad \Rightarrow a_3=3+3\times2+3\times3=3(1+2+3)$

$n=4 \quad \Rightarrow a_4=3(1+2+3+4)$

$\vdots$

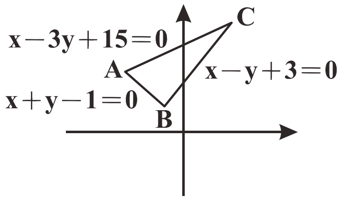
$n=50 \quad \Rightarrow a_{50}=3(1+2+3+4+\cdots\cdots+50)$

$=3\times\dfrac{(1+50)\times50}{2}=3825$

21. $\overleftrightarrow{AC}$：$(y-6)=\dfrac{6-4}{3-(-3)}(x-3)$ $\Rightarrow 3y-18=x-3$ $\Rightarrow x-3y+15=0$

$\overleftrightarrow{BC}$：$(y-2)=\dfrac{6-2}{3-(-1)}(x+1)$ $\Rightarrow x-y+3=0$

$\overleftrightarrow{AB}$：$(y-2)=\dfrac{2-4}{-1-(-3)}(x+1)$ $\Rightarrow x+y-1=0$



如圖：若 x 的係數為正，大於表示在直線的右側，小於表示在直線的左側，

則$\begin{cases} x-y+3\leqq 0 \\ x+y-1\geqq 0 \\ x-3y+15\geqq 0 \end{cases}$

22. 依題意

$T_A=2T_B=0.085h^{\frac{3}{4}}$……(1)

$T_B=0.085\times 100^{\frac{3}{4}}$……(2)

$\dfrac{(1)}{(2)}$：$\dfrac{2T_B}{T_B}=\dfrac{0.085h^{\frac{3}{4}}}{0.085\times 100^{\frac{3}{4}}}$ $\Rightarrow 2=(\dfrac{h}{100})^{\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow \dfrac{h}{100}=2^{\frac{4}{3}}=2^1\cdot 2^{\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{2}\fallingdotseq 2\times 1.26$ $\Rightarrow h\fallingdotseq 100\times 2.52=252$

23. (A) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，但 f(1)不存在

$\Rightarrow$(A)選項極限存在，但不連續

(B) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$不存在，f(1)不存在

(C) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$不存在

(D) $f(x)=(x-1)^2$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$ $\Rightarrow$連續

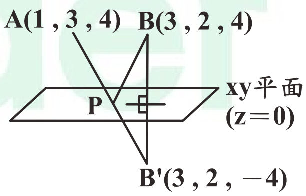
24. 取 B 在 xy 平面對面的對稱點 B'(3 , 2 , −4)，

則$\overline{BP}=\overline{B'P}$

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}$ $\Rightarrow$最小值為$\overline{AB'}$

此時 A、P、B'三點共線，設 P 點為(x , y , 0)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB'}\,//\,\overrightarrow{AP}$ $\Rightarrow (2,\ -1,\ -8)//(x-1,\ y-3,\ -4)$



$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{-4}{-8}$ $\Rightarrow \begin{cases} x-1=1 & \Rightarrow x=2 \\ y-3=-\dfrac{1}{2} & \Rightarrow y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

則 P 點$(2,\ \dfrac{5}{2},\ 0)$

25. $t=1$ 時 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=(-3,2)+(2,1)=(-1,3)$

$t=-1$ 時 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3,2)-(2,1)=(-5,1)$

則 P 點落在圖上兩點間，

其線段長$=\sqrt{(-5+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$