112 學年度四技二專統一入學測驗
數學(B) 試題

數學 B 參考公式

1.點 $P(x_0 , y_0)$到直線 L：$ax+by+c=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2.△ABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，R 為△ABC 外接圓的半徑

3.△ABC 的餘弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

4.首項為 a_1，公差為 d 的等差數列，第 n 項為 $a_n=a_1+(n-1)d$

5.參考數值：$\log_{10}2\approx0.3010$、$\log_{10}3\approx0.4771$

1. 下列哪一個向量和向量(2 , 1)<u>不平行</u>也<u>不垂直</u>？
(A)$(-1 , \frac{1}{2})$ (B)$(1 , \frac{1}{2})$ (C)$(\frac{-1}{2} , 1)$ (D)$(-1 , \frac{-1}{2})$。

2. 在$(2x^2-3)^5+3(x-1)^2$ 的展開式中，各項係數的總和為多少？
(A)-240 (B)-1 (C)1 (D)11。

3. 已知一元二次方程式 $3x^2-kx+h=0$ 沒有實根，則數對(k , h)可能為下列何者？
(A)$(-4 , 1)$ (B)(12 , 12) (C)(5 , 2) (D)(10 , 9)。

4. 已知 m_1 與 m_2 分別為直線 L_1 與直線 L_2 的斜率，且 m_1、m_2 皆不為 0。若直線 L_1 通過第一、三象限，而直線 L_2 與直線 L_1 垂直，則點(m_1 , m_2)落在第幾象限？
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四。

5. 若一次函數 f(x)的圖形通過 A(a , 0)與 B(0 , b)兩點，且 $\overline{AB}$ 之中點坐標為$(-2 , 3)$，則 $a+b+f(2)=$？
(A)11 (B)12 (C)13 (D)14。

6. 龔同學想要求出一個圓方程式的圓心與直徑，但他將方程式中 x 誤看成 y，y 誤看成 x，結果得到圓心坐標為(1 , 2)，直徑為 4。試問原本題目的圓方程式為何？
(A)$x^2+y^2-2x-4y-11=0$ (B)$x^2+y^2-4x-2y-11=0$
(C)$x^2+y^2-2x-4y+1=0$ (D)$x^2+y^2-4x-2y+1=0$。

7. 已知$\overline{u}$ 、$\overline{w}$ 兩向量的長度皆等於 2。若$\overline{u}+\overline{w}$與$\overline{u}$的夾角為 75°，試問$\overline{w}$與$-\overline{u}-\overline{w}$的夾角為何？
(A)75° (B)77° (C)105° (D)150°。

8. 試求不等式$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}x)+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}x)+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}x)+(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}x)+(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}x)>0$解的範圍為何？

(A)$x<2$　(B)$x>2$　(C)$x<-2$　(D)$x>-2$。

9. 已知$k>0$。若直線 L：$ax+4y+k=0$ 的斜率為$\frac{1}{2}$，且點$(0, 0)$到直線 L 的距離為$\sqrt{5}$，則$a+k=$？

(A)6　(B)8　(C)10　(D)12。

10. 已知多項式 $f(x)$除以$(x+2)(x-7)$的餘式為 $ax+3$。若$(x-7)$為 $f(x)$的因式，則$f(-2)=$？

(A)$\frac{27}{7}$　(B)$\frac{29}{7}$　(C)$\frac{31}{7}$　(D)$\frac{33}{7}$。

11. 若 n 為整數且二次函數 $f(x)=(n^2-n-12)x^2+6x-3$ 之圖形為開口向下的拋物線，則 n 有幾個解？

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7。

12. 已知多項式 $Q(x)=ax+b$，$f(x)=(2a-b)x^2+ax-1$，$g(x)=3x^2+x-1$，且 $f(x)=g(x)$。若分式方程式$\frac{x}{Q(x)}+\frac{5}{x-2}=\frac{-1}{(x-2)Q(x)}$的解為 $x=c$，則 $a^2+b^2+c^2=$？

(A)3　(B)10　(C)18　(D)27。

13. 在坐標平面上，二元一次聯立不等式$\begin{cases} x+y\leqq 8 \\ -x+2y\geqq 10 \\ x\geqq 0，y\geqq 0 \end{cases}$的圖解區域描述，下列何者正確？

(A)四邊形　(B)三角形　(C)二個點　(D)一條線。

14. 試求 $\cos 39^\circ\tan 39^\circ+\sin 30^\circ\tan 45^\circ\cos 60^\circ+\sin 129^\circ\tan 141^\circ=$？

(A)$\frac{1}{4}$　(B)$\frac{\sqrt{3}}{4}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)$\frac{\sqrt{3}}{2}$。

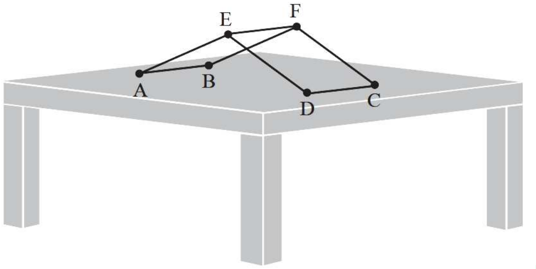
15. 已知馬拉松總長為 42.195 公里。小拉為了參加馬拉松進行跑步訓練，訓練計畫為每週訓練長度比前一週增加 3 公里。若小拉第一週跑 8 公里，則最快到第幾週時，該週的訓練長度才能超過馬拉松總長？

(A)12　(B)13　(C)14　(D)15。

16. 已知$\vec{u}=(x, y)$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$。若$\vec{u}$與向量$(1, 3)$和向量$(2, -1)$的內積值皆<u>不</u>超過 14，試問$\vec{u}$與向量$(1, 1)$的內積最大值為何？

(A)1　(B)4　(C)10　(D)14。

17. 有一款可調節角度的倒 V 型平板架，放置於平坦的桌面上，如示意圖(一)所示。若 $\overline{EA}=\overline{ED}=25$cm、$\overline{AB}=\overline{CD}=18$cm 且 $\angle AED=120^\circ$，則長方形 ABCD 面積之值最接近下列哪一個選項(支柱厚度忽略不計)？
(A)450cm^2　(B)$450\sqrt{2}\text{ cm}^2$　(C)$450\sqrt{3}\text{ cm}^2$　(D)900cm^2。



圖(一)

18. 根據研究指出，若 x 為犬隻年齡(單位：歲)，犬隻與人類的年齡換算公式可寫成：
犬隻等同的人類年齡(單位：歲)約為 $37\times\log_{10}(x)+31$。
若我們稱呼「犬瑞」乃指犬隻年齡換算為人類年齡後達 70 歲以上，則下列哪一個選項的犬隻年齡最接近且跨過「犬瑞」的門檻？
(A)9 歲　(B)10 歲　(C)12 歲　(D)15 歲。

19. 已知下表為小楓跟小道兩人在多場比賽中的戰績紀錄。若投球命中率＝(兩分球入球數＋三分球入球數)／(兩分球總投球數＋三分球總投球數)，關於兩人投球命中率高低之比較，下列敘述何者正確？
(A)小道比較高　(B)小楓比較高
(C)小楓跟小道一樣　(D)資訊不足無法比較。

	小楓	小道
(兩分球入球數，兩分球總投球數)	(50 , 100)	(90 , 200)
(三分球入球數，三分球總投球數)	(40 , 200)	(15 , 100)

20. 公司給小虹最多 50 萬元的預算來採買 x、y 兩種貨品。但小虹一時疏忽，無法確定 x 貨品跟 y 貨品的單價哪一個是 100 元、哪一個是 200 元。下列數對(x 貨品購買數量, y 貨品購買數量)中，試問哪一組<u>不會</u>超過預算？
(A)(1400 , 1900)　(B)(1600 , 1700)　(C)(1700 , 1800)　(D)(1800 , 1500)。

21. 已知某一考試，每題都是從 A、B、C、D 四個選項中選一個最適當答案，答案卷如圖(二)所示。小華在考試時間快結束時，還剩下第 21 到 25 題來不及寫。小華希望在猜答案時，這五題連續三格的答案不要出現 BAD。根據上述規則，試問第 21 到 25 題的答案，小華有多少種猜法？
(A)384　(B)625　(C)976　(D)1024。

21	22	23	24	25

圖(二)

22. 阿青想了解港口 A 及港口 B 的潮汐變化，於某日凌晨 12 點整開始，經歷 t 小時後，測量港口 A 跟港口 B 的各特定點水深變化 y(單位：公尺)，分別得到了：

港口 A：$y=4\sin(\frac{2\pi}{11}t)+16$，$t\geqq 0$

港口 B：$y=-5\cos(\frac{2\pi}{13}t)+17$，$t\geqq 0$

若滿潮代表水深升到最高以及乾潮代表水深降到最低，根據上述兩個函數，下列敘述何者正確？

(A)港口 A 的滿潮高度為 20 公尺　(B)港口 A 的乾潮高度為 16 公尺
(C)港口 B 的滿潮高度為 17 公尺　(D)港口 B 的乾潮高度為 13 公尺。

23. 根據報導，全球人口數在 2022 年底已經達到 80 億，為了因應人口成長對環境帶來的衝擊，某城市預估在年份 t(西元紀年)的人口概數為 $y(t)=\frac{600000}{1+2\times 2.7^{-0.01(t-2022)}}$，其中 $t\geqq 2022$。以下敘述何者正確？

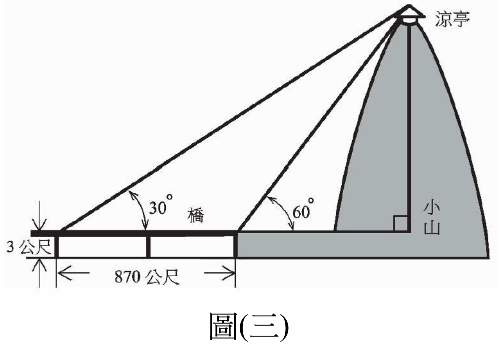
(A)該城市在 2100 年人口概數將大於 60 萬
(B)該城市在 2022 年人口概數為 20 萬
(C)該城市在 2070 年人口概數小於 2060 年人口概數
(D)該城市在 2080 年人口概數大於 2090 年人口概數。

24. 某舊商場原有 4 間相同男廁以及 4 間相同女廁，規劃任選幾間男廁改建為性別友善廁所(不分性別)，且每間男廁是否被改建的機會均等。已知改建後性別友善廁所加上女廁的間數為男廁間數的 3 倍(含)以上，且至少保留 1 間男廁。試問改建後剩下 2 間男廁的機率為何？

(A)$\frac{1}{8}$　(B)$\frac{1}{4}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)$\frac{3}{5}$。

25. 某天小奇行經一條筆直大橋時，發現其正前方有一座小山，山上有一處涼亭，涼亭恰好在小奇的正前方，如示意圖(三)所示。小奇希望估計此涼亭頂端所在位置的海拔高度。已知此橋全長約 870 公尺，橋面在同一海拔高度，在橋起點處(離山較遠的一端)測量得出涼亭頂端仰角為 30°，在橋的終點(離山較近的一端)測量涼亭頂端仰角為 60°，試求出此涼亭的海拔高度最有可能是下列何者？(假設此橋海拔高度為 3 公尺)

(A)435 公尺　(B)$3+438\sqrt{3}$ 公尺　(C)438 公尺　(D)$3+435\sqrt{3}$ 公尺。



圖(三)

數學(B)－【解答】

1.(A)	2.(B)	3.(D)	4.(D)	5.(A)	6.(D)	7.(C)	8.(D)	9.(B)	10.(A)
11.(C)	12.(C)	13.(B)	14.(A)	15.(B)	16.(C)	17.(C)	18.(C)	19.(A)	20.(B)
21.(C)	22.(A)	23.(B)	24.(D)	25.(D)					

112 學年度四技二專統一入學測驗
數學(B) 試題詳解

1.(A)	2.(B)	3.(D)	4.(D)	5.(A)	6.(D)	7.(C)	8.(D)	9.(B)	10.(A)
11.(C)	12.(C)	13.(B)	14.(A)	15.(B)	16.(C)	17.(C)	18.(C)	19.(A)	20.(B)
21.(C)	22.(A)	23.(B)	24.(D)	25.(D)					

1. 向量(2 , 1)

(A)$(-1,\ \frac{1}{2})\quad\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\ \text{不平行}\\ 2(-1)+1\cdot\dfrac{1}{2}\neq 0\ \text{不垂直}\end{cases}$

(B)$(1,\ \frac{1}{2})\quad\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{1}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\ \text{平行}\\ 2\cdot 1+1\cdot\dfrac{1}{2}\neq 0\ \text{不垂直}\end{cases}$

(C)$(-\frac{1}{2}\ ,1)\quad\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{-\frac{1}{2}}\neq\dfrac{1}{1}\ \text{不平行}\\ 2(-\dfrac{1}{2})+1\cdot 1=0\ \text{垂直}\end{cases}$

(D)$(-1,\ -\frac{1}{2})\quad\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{-1}=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}\ \text{平行}\\ 2(-1)+1(-\dfrac{1}{2})\neq 0\ \text{不垂直}\end{cases}$

2. $f(x)=(2x^2-3)^5+3(x-1)^2$

各項係數的總和$=f(1)=(2-3)^5+3(1-1)^2=-1$

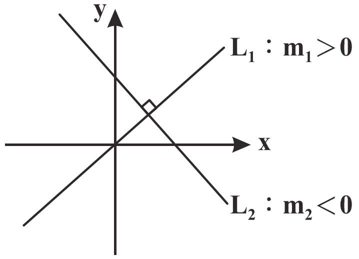
3. $3x^2-kx+h=0$

沒有實根 $\Rightarrow b^2-4ac<0\quad\Rightarrow(-k)^2-4\cdot 3\cdot h<0\quad\Rightarrow k^2-12h<0$

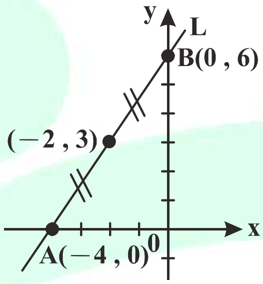
(A)$(-4\ ,1)=(-4)^2-12\cdot 1=4$ (B)$(12\ ,12)=12^2-12\cdot 12=0$

(C)$(5\ ,2)=5^2-12\cdot 2=1$ (D)$(10\ ,9)=10^2-12\cdot 9=-8<0$

4. 點(m_1 , m_2)落在第四象限



5. 斜率$=\dfrac{0-6}{-4-0}=\dfrac{3}{2}$



$L：y-0=\dfrac{3}{2}(x-(-4))$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}(x+4)$

$\Rightarrow f(2)=\dfrac{3}{2}(2+4)=9$

$a+b+f(2)=-4+6+9=11$

6. x 誤看成 y，y 誤看成 x　$\Rightarrow$圓心(1 , 2)，故原本題目之圓心應為(2 , 1)

(B)$x^2+y^2-4x-2y-11=0$

$\Rightarrow$圓心(2 , 1)，$r=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2-4(-11)}=4$，直徑$=8$

(D)$x^2+y^2-4x-2y+1=0$

$\Rightarrow$圓心(2 , 1)，$r=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2-4\cdot1}=2$，直徑$=4$

7. (1)$(\vec{u}+\vec{w})\cdot\vec{u}=|\vec{u}+\vec{w}||\vec{u}|\cdot\cos75^\circ$

$\Rightarrow|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{w}=|\vec{u}+\vec{w}|\cdot2\cdot\cos75^\circ$

$\Rightarrow 4+\vec{u}\cdot\vec{w}=|\vec{u}+\vec{w}|\cdot2\cdot\cos75^\circ$

兩邊乘(−1)

(2)$(-\vec{u}-\vec{w})\cdot\vec{w}=|\vec{u}+\vec{w}||\vec{w}|\cdot\cos\theta$；(令$(-\vec{u}-\vec{w})$與$\vec{w}$的夾角為$\theta$)

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow-\vec{u}\cdot\vec{w}-|\vec{w}|^2=|\vec{u}+\vec{w}|\cdot2\cdot\cos\theta\\ \Rightarrow-4-\vec{u}\cdot\vec{w}=|\vec{u}+\vec{w}|\cdot2(-\cos75^\circ)\end{array}\right\}\cos\theta=-\cos75^\circ\quad\therefore\theta=105^\circ$

8. 原式　$\Rightarrow(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^5})+(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{1}{2^6})x>0$

兩邊同乘 2^6　$\Rightarrow(2^5+2^4+2^3+2^2+2)+(2^4+2^3+2^2+2+1)x>0$

$\Rightarrow 31x>-62$　$\Rightarrow x>-2$

9. $m_L=-\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow a=-2$

L：$-2x+4y+k=0$

$d(O,L)=\dfrac{|k|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow |k|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}=10\quad\Rightarrow k=\pm10$(負不合)

$\therefore a+k=-2+10=8$

10. 令 $f(x)=(x+2)(x-7)Q(x)+(ax+3)$

$(x-7)$為 $f(x)$的因式　$\Rightarrow f(7)=0\quad\Rightarrow 7a+3=0\quad\Rightarrow a=-\dfrac{3}{7}$

$f(x)=(x+2)(x-7)Q(x)+(-\dfrac{3}{7}x+3)$

$f(-2)=0+(-\dfrac{3}{7}(-2)+3)=\dfrac{27}{7}$

11. 開口向下　$\Rightarrow x^2$ 項係數$<0\quad\Rightarrow n^2-n-12<0\quad\Rightarrow(n-4)(n+3)<0$

$\Rightarrow -3<n<4\quad\Rightarrow$ 整數 $n=-2,-1,0,1,2,3$(有 6 個)

12. (1) $f(x)=g(x)\quad\Rightarrow(2a-b)x^2+ax-1=3x^2+x-1$

$\Rightarrow\begin{cases}2a-b=3\\ a=1\text{代入上式得}b=-1\end{cases}\quad\Rightarrow Q(x)=x-1$

(2) $\dfrac{x}{Q(x)}+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{-1}{(x-2)Q(x)}\quad\Rightarrow\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{-1}{(x-2)(x-1)}$

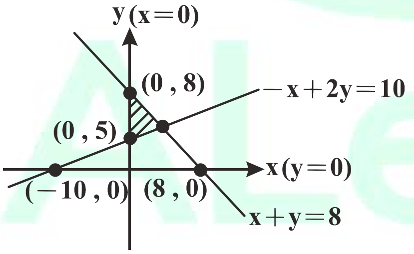
$\Rightarrow\dfrac{x(x-2)+5(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{-1}{(x-2)(x-1)}\quad\Rightarrow x(x-2)+5(x-1)=-1$

$\Rightarrow x^2+3x-4=0\quad\Rightarrow(x+4)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=-4=c$　or　$x=1$(不合，$\because$分母$\neq0$)

(3) $a^2+b^2+c^2=1^2+(-1)^2+(-4)^2=18$

13.



14. $\cos 39^\circ\tan 39^\circ+\sin 30^\circ\tan 45^\circ\cos 60^\circ+\sin 129^\circ\tan 141^\circ$

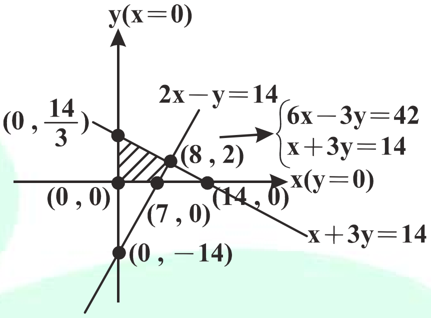
$=\cos 39^\circ\cdot\tan 39^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}+\sin(90^\circ+39^\circ)\cdot\tan(180^\circ-39^\circ)$

$=\cos39^\circ\cdot\tan39^\circ+\dfrac{1}{4}+(\cos39^\circ)(-\tan39^\circ)=\dfrac{1}{4}$

15. (1) $\left.\begin{array}{l}\text{第一週 } a_1=8 \\ \text{第二週 } a_2=8+3 \\ \text{第三週 } a_3=8+3+3\end{array}\right\} a_n=a_1+(n-1)d=8+(n-1)3=3n+5$

(2) $a_n>42.195 \quad \Rightarrow 3n+5>42.195 \quad \Rightarrow 3n>37.195 \quad \Rightarrow n>12.\ldots\ldots \quad \Rightarrow$ 最小 $n=13$

16. $\begin{cases}(x , y)\cdot(1 , 3)=x+3y\leqq 14 \\ (x , y)\cdot(2 , -1)=2x-y\leqq 14 \\ x\geqq 0 \\ y\geqq 0\end{cases}$



$(x , y)\cdot(1 , 1)=x+y$ 的最大值？

$f(x , y)=x+y$

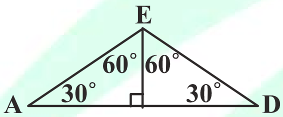
$f(0 , 0)=0$

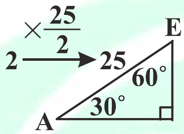
$f(7 , 0)=7$

$f(8 , 2)=10$……最大

$f(0 , \frac{14}{3})=\frac{14}{3}$

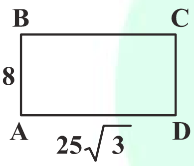
17. (1)





$\sqrt{3} \xrightarrow{\times\frac{25}{2}} \frac{25\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \overline{AD}=25\sqrt{3}$

(2)



長方形面積 $=18\times 25\sqrt{3}=450\sqrt{3}$

18. $37\cdot\log_{10}x+31\geqq 70$

$\Rightarrow 37\cdot\log_{10}x\geqq 39$

(C) $x=12 \quad \Rightarrow 37\log_{10}12=37(\log_{10}2^2+\log_{10}3)=37(0.6020+0.4771)=39.9267$

19. $\left.\begin{array}{l}\text{小楓}P=\dfrac{50+40}{100+200}=\dfrac{90}{300} \\ \text{小道}P=\dfrac{90+15}{200+100}=\dfrac{105}{300}\end{array}\right\}$ 小道比較高

20. (A)(1400 , 1900) $\quad \Rightarrow \begin{cases}1400\times 100+1900\times 200=520000 \\ 1400\times 200+1900\times 100=470000\end{cases}$

(B)(1600 , 1700) $\quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}1600\times 100+1700\times 200=500000 \\ 1600\times 200+1700\times 100=490000\end{array}\right\rangle$ 不會超過預算

21. 連續三格的答案　出現 BAD $\left\{\begin{array}{l}\text{21 22 23 24 25}\\ \text{組數}=3\end{array}\right.$

其中 1 組：$\underline{21\quad 22\quad 23}$　24　25　$\Rightarrow 4\times4=16$

B　A　D　A～D　A～D

選 1 選 1

$\Rightarrow 3\times16=48$

全部猜法$=4^5=1024$

連續三格的答案不要出現 BAD 之猜法$=1024-48=976$

22. 港口 A　$\Rightarrow -1\leqq\sin(\frac{2\pi}{11}t)\leqq1 \quad \Rightarrow -4\leqq4\cdot\sin(\frac{2\pi}{11}t)\leqq4$

$\Rightarrow 12\leqq4\cdot\sin(\frac{2\pi}{11}t)+16\leqq20 \quad \Rightarrow 12\leqq y\leqq20$

港口 B　$\Rightarrow -1\leqq\cos(\frac{2\pi}{13}t)\leqq1 \quad \Rightarrow 5\geqq-5\cos(\frac{2\pi}{13}t)\geqq-5$

$\Rightarrow 22\geqq-5\cos(\frac{2\pi}{13}t)+17\geqq12 \quad \Rightarrow 12\leqq y\leqq22$

23. $y(t)=\dfrac{600000}{1+2\times2.7^{-0.01(t-2022)}}$

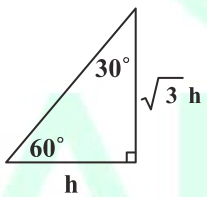
(B)$y(2022)=\dfrac{600000}{1+2\times2.7^{-0.01\times0}}=\dfrac{600000}{1+2\times1}=200000$

24. 男廁　$\Rightarrow$ A , B , C , D

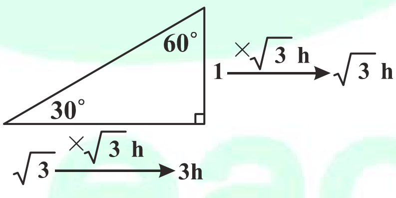
$\left.\begin{array}{l}\text{留1間}\quad\Rightarrow C^4_1=4\\ \text{留2間}\quad\Rightarrow C^4_2=6\end{array}\right\}$樣本空間$=4+6=10$

$P_{\text{剩2間男廁}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

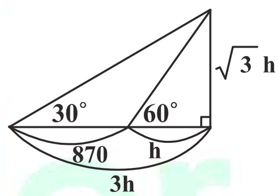
25. (1)



(2)



(3)



$870+h=3h$

$\therefore h=435$

涼亭的海拔高度$=3+\sqrt{3}\ h=3+435\sqrt{3}$