111 學年度四技二專統一入學測驗 數學(C) 試題

數學 C 參考公式

1.首項為 a_1，公比為 $r(r\neq 1)$的等比數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

2.點 $P(x_0 , y_0)$到直線 L：$ax+by+c=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3.△ABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，R 為△ABC 外接圓的半徑

4.△ABC 的餘弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

5.橢圓方程式 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，則參數式為 $\begin{cases}x=h+a\cos\theta\\y=k+b\sin\theta\end{cases}$，其中 $a>0$, $b>0$, $0\leqq\theta<2\pi$ ，式子中的 θ 為參數

6.柯西不等式：設 a_1、a_2、b_1、b_2 為實數，則$(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)\geqq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

7.參考數值：$\log 0.5\approx -0.301$、$\log 8.91\approx 0.950$

1. 若 $x=\log_3 7$，則下列何者正確？
(A)$7^x=3$　(B)$3^x=7$　(C)$x^7=3$　(D)$x^3=7$。

2. 已知等比數列<a_k>首項 $a_1=2$，公比 $r=3$。若前 n 項和大於 2022，則滿足條件的最小正整數 n=？
(A)5　(B)7　(C)9　(D)11。

3. 公益文教基金會調查技術型高中三年級學生每天手機使用時間介於 3.1 小時至 4.9 小時之間(含)。若 x(單位：小時)為其中一位參與調查的技術型高中學生每天手機使用時間，且將上述使用時間範圍用 $|x-a|\leqq b$ 來表示，則 ab=？
(A)3.2　(B)3.6　(C)3.8　(D)4.2。

4. 下列何者<u>錯誤</u>？
(A)$y=|\sin 2x|$之週期為 $\dfrac{\pi}{2}$　(B)$y=3\sin x$ 之週期為 2π
(C)$y=\cos 2x$ 之週期為 $\dfrac{\pi}{2}$　(D)$y=4\cos x$ 之週期為 2π。

5. 若 $\dfrac{x^2+2x+7}{(x-2)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$，則 $A+B+C=$？
(A)1　(B)5　(C)10　(D)15。

6. 坐標平面上，若點 $A(a , -6)$在直線 L：$2x-y+12=0$ 之右半平面，則下列何者為 a 的可能值？
(A)-15　(B)-12　(C)-10　(D)-7。

7. 若 A(1 , 4)、B(6 , 2)所連接的線段 $\overline{AB}$ 與直線 L：$x-y+1=0$ 相交於 P 點，則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$ ＝？

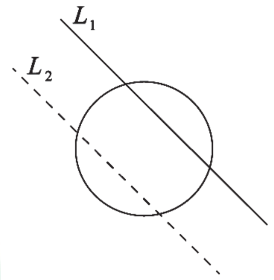
(A) $\dfrac{2}{5}$　(B) $\dfrac{3}{7}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{3}{5}$。

8. 不等式 $5x-4<x^2<x+2$ 的解為何？

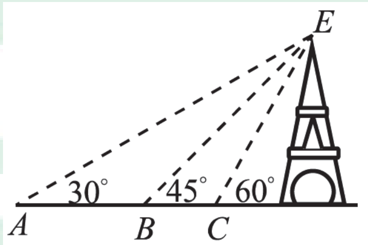
(A) $-1<x<1$　(B) $-1<x<2$　(C) $-2<x<1$　(D) $0<x<4$。

9. 已知圓 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 與相異兩直線 L_1：$x+y+1=0$ 及 L_2：$ax+by+10=0$ 分別交於兩點，且 $L_1 // L_2$，如圖(一)所示。若此圓圓心到兩直線 L_1、L_2 的距離相等，則 $a+b$＝？

(A)2　(B)4　(C)6　(D)10。



圖(一)



圖(二)

10. 若四次多項式 $ax^4+bx^3+6x^2+5x+2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式為 $3x+4$，則 $a+b$＝？

(A) -12　(B) -6　(C) -4　(D) -2。

11. 在一個園遊會的攤位遊戲中，遊戲規則如下：在一個桶子裡有三種球，抽中紅球可得 x 點，抽中黃球可得 y 點，但抽中黑球則必須扣掉 z 點。每個人抽 10 次，每次抽一個球，最後依照得到的點數來兌換獎品。已知小華抽中 3 個紅球、3 個黃球、4 個黑球，共得 10 點；小明抽中 4 個紅球、3 個黃球、3 個黑球，共得 21 點；小玲抽中 2 個紅球、6 個黃球、2 個黑球，共得 26 點。若小蘭抽中 3 個紅球、5 個黃球、2 個黑球，則小蘭得到的點數為何？

(A)28　(B)30　(C)32　(D)39。

12. 某人由 A 處測量高塔塔頂 E 的仰角為 30°，朝高塔方向前進 a 公尺至 B 處時測量塔頂 E 的仰角為 45°，繼續朝高塔方向前進 b 公尺至 C 處時測量塔頂 E 的仰角為 60°，如圖(二)所示，則 $\dfrac{a}{b}$ ＝？

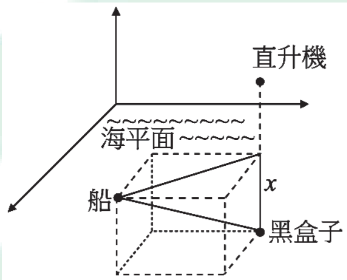
(A) $\sqrt{3}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$。

13. 正四面體(四個面皆為正三角形)ABCD 的四個頂點坐標為 A(0, 0, 0)、B(2, 0, 0)、C(1, $\sqrt{3}$, 0)、D(x, y, z)，其中 z＞0，則 z＝？

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

14. 今有一飛機失事落海，救難直升機於失事地點附近偵測到黑盒子(飛行記錄器的俗稱)，其所發出的訊號恰好位於直升機的正下方，但無法確定深度，直升機將位置訊息告知水上工作船，經船上人員推算，直升機位於工作船東方 140 公尺、北方 80 公尺的海平面上方 100 公尺處，並且偵測到該黑盒子與水上工作船的直線距離為 180 公尺，如圖(三)所示。根據上述訊息，若黑盒子在海平面下深度為 x 公尺，則 x＝？

(A)60　(B)70　(C)80　(D)90。



圖(三)

15. 某歌手打算在她的演唱會上表演一段由 6 首不同的歌曲串成的組曲，其中 3 首慢歌、3 首快歌。她的音樂總監建議在歌曲的安排上最多只能 2 首慢歌連在一起唱，因為這樣才會使得整個組曲的節奏比較流暢。若她認同並接受音樂總監的建議，試問這段組曲可以有多少種不同的安排方式？

(A)576　(B)648　(C)696　(D)720。

16. 已知平面上兩向量 $\vec{a}=(2x+1,-3)$、$\vec{b}=(3,x-2)$，滿足 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$，則 x＝？

(A)3　(B)1　(C)－1　(D)－3。

17. 若矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$，且 AB＝A＋B，則 c＝？

(A)－1　(B) $\frac{-1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D)1。

18. 已知函數 $f(x)=x^3+\frac{12}{x}$ 圖形在切點(a , b)的切線斜率為 9。若 a＞0，則 a＋b＝？

(A)－8　(B)11　(C)14　(D)16。

19. 不定積分 $\int \frac{x+3}{2\sqrt{x}}dx=$？

(A) $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}+C$　　(B) $\frac{\frac{x^3}{2}+3x}{x^{\frac{3}{2}}}+C$

(C) $\frac{\frac{x^2}{2}+3x}{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}+C$　　(D) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+C$。

20. 小明計畫由基隆沿國道一號開車南下高雄渡假。早上 8：00 經過中興隧道 0 公里處的起點，經紀錄儀錶板上車速變化，在 8：00 開始後，時間 t(小時)的速度函數為 $v(t)=-1.5t^2+6t+90$(公里/小時)。若依此速度變化，則 11：00 時小明應該最接近哪一個服務區？

(A)泰安服務區(158 公里處)　(B)西螺服務區(229 公里處)
(C)新營服務區(284 公里處)　(D)仁德服務區(335 公里處)。

21. 為了響應節能減碳政策，某公司基於成本考量決定在六年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 50%。公司希望每年依固定的比率 r(當年和前一年排放量的比)逐年降低二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則下列敘述何者正確？(計算時可參考試卷之參考公式)

(A) $0.91<r<0.93$　(B) $0.88<r<0.91$　(C) $0.85<r<0.88$　(D) $0.82<r<0.85$。

22. 若△ABC 三邊長為 4、5、6，則其外接圓直徑為何？

(A) $\frac{8}{\sqrt{7}}$　(B) $\frac{12}{\sqrt{7}}$　(C) $\frac{16}{\sqrt{7}}$　(D) $\frac{20}{\sqrt{7}}$。

23. 已知△ABC 的面積為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，其中 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=2$，且∠BAC 為鈍角。若 $\overline{BC}$ 的長度為 a，則 $a^2=$？

(A) $13-6\sqrt{2}$　(B) $13-2\sqrt{6}$　(C) $13+2\sqrt{6}$　(D) $13+6\sqrt{2}$。

24. 若 P(x , y)為橢圓 $4x^2+6y^2-12y-6=0$ 上任意一點，則 $x+3y$ 的最大值為何？

(A) $3+7\sqrt{3}$　(B) $3+5\sqrt{3}$　(C) $3+3\sqrt{5}$　(D) $3+\sqrt{21}$。

25. 若函數 $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+a}{x^2-2x-3}, & x>3\\ \frac{x-5}{x-b}, & x\leqq 3\end{cases}$ 在 $x=3$ 處連續，則 $a+b=$？

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3。

數學(C)－【解答】

1.(B)	2.(B)	3.(B)	4.(C)	5.(A)	6.(D)	7.(A)	8.(A)	9.(B)	10.(B)
11.(A)	12.(A)	13.(C)	14.(C)	15.(A)	16.(D)	17.(C)	18.(D)	19.(D)	20.(C)
21.(B)	22.(C)	23.(D)	24.(D)	25.(C)					

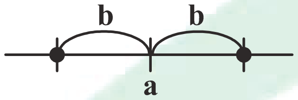
111 學年度四技二專統一入學測驗
數學(C)　試題詳解

1.(B)	2.(B)	3.(B)	4.(C)	5.(A)	6.(D)	7.(A)	8.(A)	9.(B)	10.(B)
11.(A)	12.(A)	13.(C)	14.(C)	15.(A)	16.(D)	17.(C)	18.(D)	19.(D)	20.(C)
21.(B)	22.(C)	23.(D)	24.(D)	25.(C)					

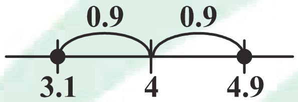
1. $x=\log_3 7 \Leftrightarrow 3^x=7$

2. 等比總和公式 $S_n=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$，要求 $\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}>2022$，即要求 $3^n>2023$

   $\begin{pmatrix} 3^1=3，3^2=9，3^3=27，3^4=81 \\ 3^5=243，3^6=729，3^7=2187 \end{pmatrix}$　知 $n\geqq 7$

3. 利用 

$a-b\leqq x\leqq a+b \Leftrightarrow |x-a|\leqq b$

$3.1\leqq x\leqq 4.9 \Leftrightarrow |x-4|\leqq 0.9$

   所求 $ab=4(0.9)=3.6$

4. (A)$|\sin 2x|$之週期為 $\dfrac{2\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{2}$；(B)$3\sin x$ 之週期為 2π；(C)$\cos 2x$ 之週期為 $\dfrac{2\pi}{2}$ $=\pi$；(D)$4\cos x$ 之週期為 2π。

5. 通分後右分子 $A(x+2)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x+2)=g(x)$

   左分子 $=x^2+2x+7=f(x)$

   $f(x)$恆等於 $g(x)$　比較雙方二次項係數，知 $1=A+B+C$

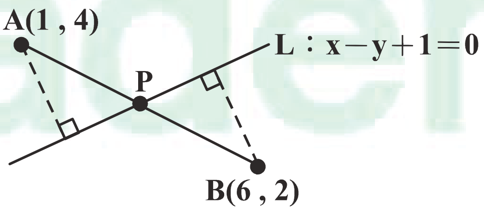
6. $L：2x-y+12=0$，x 之係數 $2>0$

   知 L 之右半平面為 $2x-y+12>0$

   又 $A(a,-6)$在 L 之右半平面

   即 $2(a)-(-6)+12>0$，知 $a>-9$

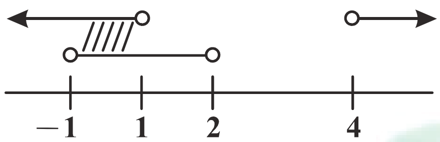
7. $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{d(A,L)}{d(B,L)}=\dfrac{\dfrac{|(1)-(4)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}}{\dfrac{|(6)-(2)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}}=\dfrac{2}{5}$



8. $5x-4<x^2<x+2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}5x-4<x^2\\x^2<x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-5x+4>0\\x^2-x-2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-4)>0\\(x+1)(x-2)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>4\text{或}x<1\\-1<x<2\end{cases}$，

所求$-1<x<1$



9. 圓：$x^2+y^2+2x+4y-3=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=3+1+4$ 知圓心 $O(-1,-2)$

L_1：$x+y+1=0$，L_2 平行 L_1 可設 L_2 為 $x+y+t=0$

要求 $d(O,L_1)=d(O,L_2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{|(-1)+(-2)+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|(-1)+(-2)+t|}{\sqrt{2}}$

即 $2=|t-3|$，知 $t=5$ 或 1

但 L_2 與 L_1 相異，故 L_2：$x+y+5=0$

即 $2x+2y+10=0$，$a+b=4$

10. 令 $f(x)=ax^4+bx^3+6x^2+5x+2$(已知數在後幾項)

$=(x+1)^2Q(x)+3x+4=(x^2+2x+1)(mx^2+nx+k)+3x+4$

$\left.\begin{array}{ll}\text{常數項} & 2=k+4\\ 1\text{ 次項係數} & 5=n+2k+3\\ 2\text{ 次項係數} & 6=k+2n+m\end{array}\right\} \begin{array}{l}k=-2\\ n=6\\ m=-4\end{array}$

3 次項係數　$b=n+2m=-2$

4 次項係數　$a=m=-4$

所求 $a+b=-6$

11.

	華	明	玲	蘭
紅＋x	3	4	2	3
黃＋y	3	3	6	5
黑－z	4	3	2	2
計	10	21	26	?

即 $\begin{cases}3x+3y-4z=10\cdots\cdots(1)\\4x+3y-3z=21\cdots\cdots(2)\\x+3y-z=13\cdots\cdots(3)\end{cases}$

$\begin{pmatrix}\text{小玲 } 2x+6y-2z=26\\ \text{化簡成 } x+3y-z=13\end{pmatrix}$

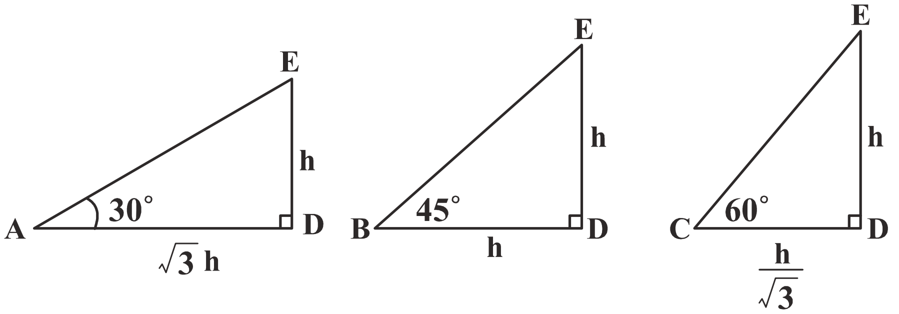
$(2)-(1)\quad \Rightarrow x+z=11$

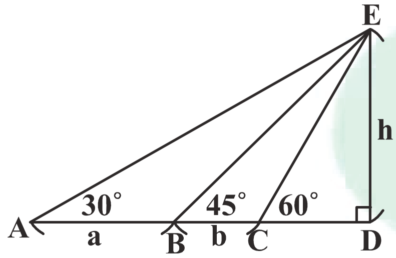
$(2)-(3)\quad \Rightarrow 3x-2z=8$

知 $x=6$，$z=5$，代回知 $y=4$

所求小蘭之點數 $3(6)+5(4)-2(5)=28$

12. 利用





$$\frac{a}{b}=\frac{\overline{AD}-\overline{BD}}{\overline{BD}-\overline{CD}}=\frac{\sqrt{3}h-h}{h-\frac{h}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$$

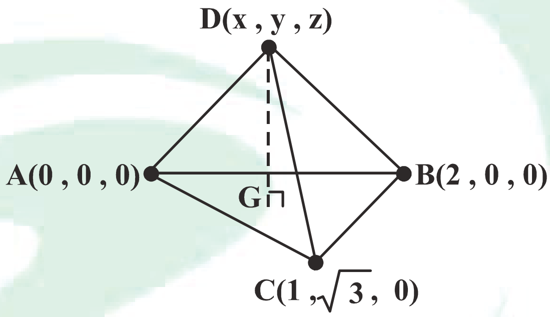
13. G 為△ABC 之重心，知 $G(\frac{0+2+1}{3}, \frac{0+0+\sqrt{3}}{3}, \frac{0+0+0}{3})$，即 $G(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$

△ABC 在 xy 平面，D 在 G 之正上方

可設 $D(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, z)$，且 $z>0$

$\overline{AD}=\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+z^2}=\overline{AB}=2$

$1+\frac{1}{3}+z^2=4$，知 $z=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$



14. 若水上工作船之位置 O(0 , 0 , 0)

救難直升機位置 A(140 , 80 , 100)

黑盒子之位置 B(140 , 80 , $-x$)，$x>0$

已知 $\overline{OB}=\sqrt{140^2+80^2+x^2}=180$

令 $x=20t$(為了計算方便)

$(20\cdot 7)^2+(20\cdot 4)^2+(20\cdot t)^2=(20\cdot 9)^2$

可得 $49+16+t^2=81$，知 $t=4$

所求 $x=20t=80$

15. 3 首慢歌 S_1, S_2, S_3

3 首快歌 f_1, f_2, f_3

要求 $S_1, S_2, S_3, f_1, f_2, f_3$ 排列但 S_1, S_2, S_3 不全相鄰

即任排－S_1, S_2, S_3 全相鄰

$=6!-4!\times 3!=720-24\times 6=576$

16. $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$

知$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2x+1,-3)(3,x-2)=0$

即$6x+3-3x+6=0$，知$x=-3$

17. $A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix} 2a-b & ac-d \\ 4+3b & 2c+3d \end{bmatrix}$，$A+B=\begin{bmatrix} a+2 & c-1 \\ b+2 & d+3 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 2a-b=a+2 \\ 4+3b=b+2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b=-1 \\ a=1 \end{array} \\ ac-d=c-1 \\ 2c+3d=d+3 \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} c-d=c-1 \\ 2c+3d=d+3 \end{cases}$ 知 $\begin{array}{l} d=1 \\ c=\dfrac{1}{2} \end{array}$

18. $f(x)=x^3+\dfrac{12}{x}=x^3+12x^{-1}$

$f'(x)=3x^2-12x^{-2}=3x^2-\dfrac{12}{x^2}$

f在(a,b)之切線斜率為$f'(a)=9$

即$3a^2-\dfrac{12}{a^2}=\dfrac{3(a^4-4)}{a^2}=9$

即$a^4-3a^2-4=0$

$(a^2-4)(a^2+1)=0$　已知$a>0$　知$a=2$，$a+b=2+f(2)=2+8+6=16$

19. $\displaystyle\int\frac{x+3}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}})\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int(x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})dx=\frac{1}{2}[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3\cdot2\cdot x^{\frac{1}{2}}]+C=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+C$

20. 速度函數$v(t)=-1.5t^2+6t+90$

位移函數$s(t)=(-1.5)\cdot\dfrac{1}{3}\cdot t^3+3t^2+90t$

所求$s(11-8)=(-0.5)(3)^3+3(3)^2+90(3)=283.5$

21. 設當今二氧化碳排放量為 A

要求 $Ar^6=A\cdot\frac{1}{2}$　即 $r^6=\frac{1}{2}$

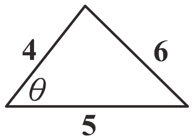
$\log r^6=6\log r=\log\frac{1}{2}=-\log 2=-0.301$

$\log r\fallingdotseq-0.05$　$1+\log r=1+(-0.05)=0.95$

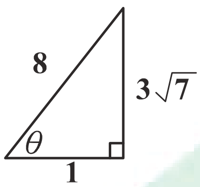
(由參考公式數值 $\log 8.91\fallingdotseq 0.950$)

知 $\log 8.91=1+\log r=\log 10r$

即 $10r=8.91$　即 $r=0.891$

22. 

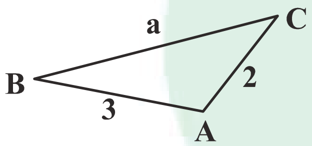
由餘弦定理知 $\cos\theta=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$



知 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

由正弦定理知 $\frac{6}{\sin\theta}=\frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=2R$

所求外接圓直徑 $2R=\frac{16}{\sqrt{7}}$

23. 

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin A=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

知 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 但 $90^\circ<A<180^\circ$

故 $\cos A=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

又 $a^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos A=4+9-2\times2\times3\times(\frac{-\sqrt{2}}{2})=13+6\sqrt{2}$

24. 橢圓 $4x^2+6y^2-12y-6=0$

$\Leftrightarrow 4x^2+6(y^2-2y+1)=6+6=12$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$

可利用參數式 $x=\sqrt{3}\cos\theta$，$y=1+\sqrt{2}\sin\theta$

所求 $x+3y=\sqrt{3}\cos\theta+3(1+\sqrt{2}\sin\theta)=\sqrt{3}\cos\theta+3\sqrt{2}\sin\theta+3$

$\max\sqrt{\sqrt{3}^2+(3\sqrt{2})^2}+3=3+\sqrt{21}$

25. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+a}{x^2-2x-3}, & x>3\\ \dfrac{x-5}{x-b}, & x\leqq 3\end{cases}$

f 在 $x=3$ 處連續

$$\left(\begin{array}{l} f(3)=\dfrac{3-5}{3-b}=\dfrac{-2}{3-b}\\ \lim\limits_{x\to 3}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+a}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-5}{x-b}=\dfrac{3-5}{3-b}=\dfrac{-2}{3-b}\end{cases}\end{array}\right.$$

$(\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+a}{x^2-2x-3}$ 存在，必 $2(3)+a=0$，即 $a=-6)$

$\dfrac{-2}{3-b}=\dfrac{1}{2}$，$b=7$，所求 $a+b=-6+7=1$