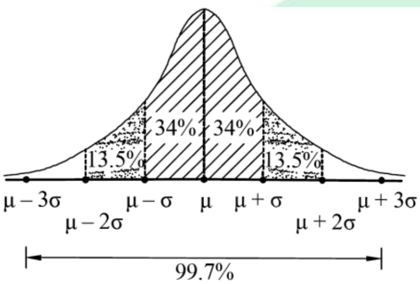
108 學年度四技二專統一入學測驗

數學(A) 試題

數學 A 參考公式

1. 若α、β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$、$\alpha\beta=\frac{c}{a}$。
2. 首項為 a_1，公差為 d 的等差數列，前 n 項之和為 $S_n=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$。
3. 首項為 a_1，公比為 $r(r\neq 1)$的等比數列，前 n 項之和為 $S=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$。
4. 常態分配



1. 設 $\vec{a}=(3,1)$、$\vec{b}=(-1,2)$、$\vec{c}=(3,8)$，且 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，則 $x+y=$？
   (A)7　(B)5　(C)3　(D)2。
2. 已知 a、b 為一元二次方程式 $x^2+7x-15=0$ 的兩根，則下列何者是以 2a、2b 為兩根的方程式？
   (A)$x^2-14x-30=0$　(B)$x^2-14x-60=0$　(C)$x^2+14x-30=0$　(D)$x^2+14x-60=0$。
3. $\tan 225^\circ+\sec(-30^\circ)-\csc 120^\circ=$？
   (A)1　(B)-1　(C)$1+\frac{4\sqrt{3}}{3}$　(D)$-1-\frac{4\sqrt{3}}{3}$。
4. 若 A、B 為直線 $3x+4y=5$ 上相異的兩點，且向量 $\overrightarrow{AB}=(a,b)$，則 $6a+8b-5=$？
   (A)-10　(B)-5　(C)5　(D)10。
5. 同學在細菌培養的實驗中，發現 A 細菌從開始經 3 小時數目由 500 成長至 600，假設 A 細菌呈指數函數成長，試問從開始經 9 小時，A 細菌的數目最接近下列哪一個數？
   (A)720　(B)864　(C)1037　(D)1800。

6. 平面上三個圓方程式，分別為

圓 A：$x^2+y^2+4x-8y+16=0$，

圓 B：$x^2+y^2-4x-10y+19=0$，

圓 C：$(x-1)^2+(y+3)^2=4$，設三圓的圓心同時以相同速率往 x 軸方向做垂直移動，且 a、b、c 分別表示圓 A、B、C 最早碰觸 x 軸所需時間，則下列何者正確？

(A)$a>b>c$　(B)$a>c>b$　(C)$b>a>c$　(D)$c>b>a$。

7. 幼兒園中從大、中、小班各派二位小朋友共六位，由左向右排成一列玩遊戲，若每位小朋友排在任一位置機率相同，則同班小朋友均相鄰的機率為何？

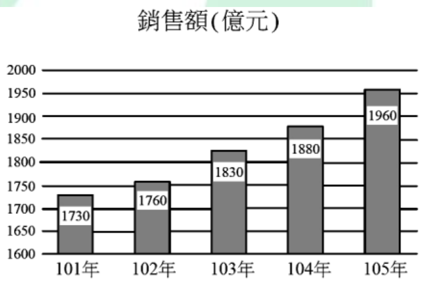
(A)$\frac{1}{120}$　(B)$\frac{1}{90}$　(C)$\frac{1}{30}$　(D)$\frac{1}{15}$。

8. 某校高三有 2000 位學生，數學段考成績呈常態分布，平均成績 65 分，標準差 8 分，小明預估成績在高三數學排名介在 3 至 50 名之間，則合乎他預估分數的最接近區間為何？

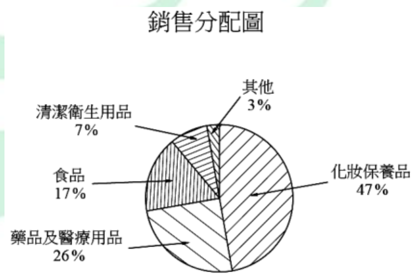
(A)[65 , 81]　(B)[57 , 73]　(C)[81 , 89]　(D)[87 , 95]。

9. 國內自 101 年至 105 年藥妝零售業每年銷售額的長條圖，如圖(一)，而其中 105 年藥妝零售業銷售分配圓形圖，如圖(二)，求該年銷售分配比重最高的前二類銷售金額差距為何？(單位：億元)

(A)411.6　(B)394.8　(C)284.6　(D)176.4。



圖(一)



圖(二)

10. 已知 $\sin^2\theta=\cos^2\theta-3\sin\theta+1$，且 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則 $\theta=$？

(A)15°　(B)30°　(C)45°　(D)60°。

11. 若一扇形的面積為 $\frac{27\pi}{2}$，弧長為 $\frac{9\pi}{2}$，則此扇形的圓心角為何？

(A)$\frac{\pi}{4}$　(B)$\frac{\pi}{3}$　(C)$\frac{2\pi}{3}$　(D)$\frac{3\pi}{4}$。

12. 已知多項式 $f(x)$除以 $x-1$ 得到商式 $g(x)$以及餘數 3，且 $g(x)$除以 $x-2$ 得到餘數 6，則 $f(x)$除以 $x-2$ 的餘數為何？

(A)6　(B)9　(C)15　(D)21。

13. 將$(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)(x^2-x+1)$展開，可得下列何式？

(A)$x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

(B)$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

(C)$x^7-2x^6-3x^5-3x^4-3x^3-3x^2-2x-1$

(D)$x^7-2x^6+3x^5-3x^4+3x^3-3x^2+2x-1$。

14. 由 0、1、2、3、4、5、6 七個數字中取三個相異數字排成三位數的偶數，則方法有幾種？

(A)60　(B)90　(C)105　(D)120。

15. 已知正三角形 ABC 的三個頂點分別為 $A(a,b)$、$B(-1,1)$、$C(1,-1)$，則 $ab=$？

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4。

16. 設直線 L 通過 $A(-k,2)$、$B(1,2k)$兩點，且與直線 L_2：$x+5y-5=0$ 互相垂直，則 $k=$？

(A)$-\frac{7}{3}$　(B)$-\frac{3}{7}$　(C)$\frac{9}{11}$　(D)$\frac{11}{9}$。

17. 設 a 為實數，若 $ax^2-2ax+2a+3<0$ 的解為任意實數，則下列何者正確？

(A)$a<-3$　(B)$-3<a<0$　(C)$0<a<3$　(D)$a>3$。

18. 已知兩直線 L_1：$x-2y+3=0$ 和 L_2：$2x+y-1=0$，若 A、B 二點在 L_1 的異側且 A、C 二點在 L_2 的同側，其中 A、B、C 三點坐標分別為 $A(-2,k)$、$B(k,3)$和 $C(-k,-k)$，則實數 k 的範圍為何？

(A)$\frac{-1}{3}<k<\frac{1}{2}$ 或 $3<k<5$　(B)$\frac{1}{2}<k<5$

(C)$k<\frac{-1}{3}$ 或 $k>3$　(D)無解。

19. 某飼料工廠製造一包豬飼料需要大豆 5 公斤、玉米 2 公斤；製造一包雞飼料需要大豆 2 公斤、玉米 3 公斤；此工廠共有大豆 200 公斤、玉米 180 公斤，若每包豬飼料可獲利 22 元，且每包雞飼料可獲利 44 元，試求其可獲得之最大利潤為何？

(A)2310 元　(B)2480 元　(C)2560 元　(D)2640 元。

20. 已知 a 為實數，若一元二次方程式$(a-1)x^2+a^3x+(a^2+a+1)=0$ 的解為兩相同實根，則 $a=$？

(A)$\sqrt{3}$　(B)$\sqrt[3]{3}$　(C)$\sqrt{2}$　(D)$\sqrt[3]{2}$ 。

21. 甲生忘了金融卡密碼的最後三個數字 abc，但他記得 $a<b<c$，均為 1、2、3、4、5、6 中的數字，且其和 $a+b+c$ 為 5 的倍數，若甲生依上述條件猜測一組密碼，則甲生猜中的機率為何？

(A)$\frac{1}{30}$　(B)$\frac{1}{5}$　(C)$\frac{1}{4}$　(D)$\frac{1}{3}$。

22. 由十男十女共二十人中選出十人，其中三個是男生，七個是女生，則有多少種選法？

(A)120　(B)14400　(C)C^{20}_{10}　(D)7！×3！。

23. 若點 P(3 , 4)到圓 $2x^2+2y^2-4x+6y+1=0$ 之切線段長度為 $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ ，則 $a=$？

(A)7　(B)5　(C)3　(D)2。

24. 設〈a_k〉為公比 -2 的等比數列，已知 $a_1a_3=12$，則 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=$？

(A)219　(B)237　(C)246　(D)255。

25. $\sum_{k=1}^{10}(2^k+3k+2)=$？

(A)2229　(B)2230　(C)2231　(D)2232。

【解答】

1.(B)	2.(D)	3.(A)	4.(B)	5.(B)	6.(A)	7.(D)	8.(C)	9.(A)	10.(B)
11.(D)	12.(B)	13.(D)	14.(C)	15.(C)	16.(A)	17.(A)	18.(A)	19.(D)	20.(D)
21.(C)	22.(B)	23.(C)	24.(D)	25.(C)					

108 學年度四技二專統一入學測驗

數學(A) 試題詳解

1.(B)	2.(D)	3.(A)	4.(B)	5.(B)	6.(A)	7.(D)	8.(C)	9.(A)	10.(B)
11.(D)	12.(B)	13.(D)	14.(C)	15.(C)	16.(A)	17.(A)	18.(A)	19.(D)	20.(D)
21.(C)	22.(B)	23.(C)	24.(D)	25.(C)					

1. $(3, 8) = x(3, 1) + y(-1, 2)$

   $\Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \therefore x + y = 5$

2. 已知$\begin{cases} a + b = -7 \\ ab = -15 \end{cases}$

   則以 2a、2b 為 2 根之方程式為

   $(x-2a)(x-2b) = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 2(a+b)x + 4ab = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 14x - 60 = 0$

3. $\tan225^\circ + \sec(-30^\circ) - \csc120^\circ$

   $= \tan45^\circ + \sec30^\circ - \csc60^\circ$

   $= 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 1$

4. 令 $A(3, -1)$，$B(-1, 2)$，則 $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$

   $\therefore 6a + 8b - 5 = 6\cdot(-4) + 8\cdot 3 - 5 = -5$

5. 已知每 3 小時成長$\dfrac{600}{500} = \dfrac{6}{5}$倍

   則從開始經 9 小時，A 菌接近 $500\times(\dfrac{6}{5})^3 = 864$

6. 圓 A：$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 2^2$，圓心$(-2, 4)$，$r_A = 2$

   圓 B：$(x-2)^2 + (y-5)^2 = \sqrt{10}^2$，圓心$(2, 5)$，$r_B = \sqrt{10}$

   圓 C：$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2$，圓心$(1, -3)$，$r_C = 2$

   則圓 A 上的點到 x 軸之最短距離$= |4| - 2 = 2$

   圓 B 上的點到 x 軸之最短距離$= |5| - \sqrt{10} \fallingdotseq 1.8$

   圓 C 上的點到 x 軸之最短距離$= |-3| - 2 = 1$

   $\therefore a > b > c$

7. $n(S)=6!=720$

n(同班均相鄰)$=3!\times2!\times2!\times2!=48$ 大$_1$大$_2$ 中$_1$中$_2$ 小$_1$小$_2$

$\therefore P=\dfrac{48}{720}=\dfrac{1}{15}$

8. $\dfrac{3}{2000}=0.15\%$，$P(x>\bar{x}+3\sigma)=0.15\%$

$\dfrac{50}{2000}=2.5\%$，$P(x>\bar{x}+2\sigma)=2.5\%$

$\therefore$ 排名介於 3 至 50 名之間，則區間為[81 , 89]

9. $1960\times(47\%-26\%)=411.6$

10. $\sin^2\theta=\cos^2\theta-3\sin\theta+1$

$\Rightarrow \sin^2\theta=1-\sin^2\theta-3\sin\theta+1 \quad \Rightarrow 2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=0$

$\Rightarrow (2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$ (-2 不合)，則$\theta=30^\circ$

11. 已知$\begin{cases}\dfrac{1}{2}r^2\Theta=\dfrac{27}{2}\pi \cdots\cdots(1)\\ r\Theta=\dfrac{9}{2}\pi \cdots\cdots(2)\end{cases}$ $\dfrac{(1)}{(2)}$：$\dfrac{1}{2}r=3 \quad \therefore r=6$ 代入(2)

$\Rightarrow 6\cdot\theta=\dfrac{9}{2}\pi$，則$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

12. 已知$\begin{cases}f(x)=(x-1)\times g(x)+3\\ g(2)=6\end{cases}$

則 $f(x)$除以$(x-2)$的餘數$=f(2)=(2-1)\cdot g(2)+3=9$

13. $(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)(x^2-x+1)=x^7-2x^6+3x^5-3x^4+3x^3-3x^2+2x-1$

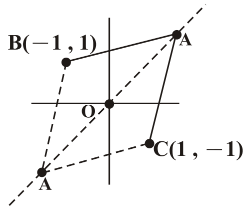
14. (情況一)個位數為 0：$\underset{\text{個位}}{\underset{\uparrow}{1}}\times\underset{\text{百位}}{\underset{\uparrow}{6}}\times\underset{\text{十位}}{\underset{\uparrow}{5}}=30$

(情況二)個位數為 2、4、6：$\underset{\text{個位}}{\underset{\uparrow}{3}}\times\underset{\text{百位}}{\underset{\uparrow}{5}}\times\underset{\text{十位}}{\underset{\uparrow}{5}}=75$

$\therefore$ 共 $30+75=105$ 種

15. $B(-1,1)$，$C(1,-1)$ $\Rightarrow$ 在 $x+y=0$ 上

則 A 點在 $\overline{BC}$ 之中垂線上



$\Rightarrow$ 過原點與 $x+y=0$ 垂直之直線為 $x-y=0$

設 A 點座標(t, t)

又 $\overline{BC}=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ $\overline{AO}$(正三角形高) $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(2\sqrt{2})=\sqrt{6}$

$\Rightarrow \overline{AO}=\sqrt{t^2+t^2}=\sqrt{6}$ $\Rightarrow 2t^2=6$ $\therefore t^2=3$，$t=\pm\sqrt{3}$

$\therefore A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$或$(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$，則 $ab=3$

16. $m_{\overline{AB}}\times M_{L2}=-1$

$\Rightarrow \dfrac{2k-2}{1+k}\times(-\dfrac{1}{5})=-1$ $\Rightarrow 2k-2=5k+5$ $\therefore k=-\dfrac{7}{3}$

17. $ax^2-2ax+2a+3<0$ 恆成立

$$\begin{cases} a<0\cdots\cdots(1) \\ D=(-2a)^2-4a\cdot(2a+3)<0\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(2)$4a^2-4a(2a+3)<0$ $\Rightarrow a^2-a(2a+3)<0$

$\Rightarrow -a^2-3a<0$ $\Rightarrow a^2+3a>0$ $\Rightarrow a(a+3)>0$ $\therefore a>0$ 或 $a<-3$……(3)

由(1)∩ (3)$a<-3$

18. A、B 在 L_1 異側：$(-2-2k+3)(k-6+3)<0$ $\Rightarrow(-2k+1)(k-3)<0$

$\Rightarrow(2k-1)(k-3)>0$ $\Rightarrow k>3$ 或 $k<\dfrac{1}{2}$……(1)

A、C 在 L_2 同側：$(-4+k-1)(-2k-k-1)>0$ $\Rightarrow(k-5)(-3k-1)>0$

$\Rightarrow(k-5)(3k+1)<0$ $\Rightarrow \dfrac{-1}{3}<k<5$……(2)

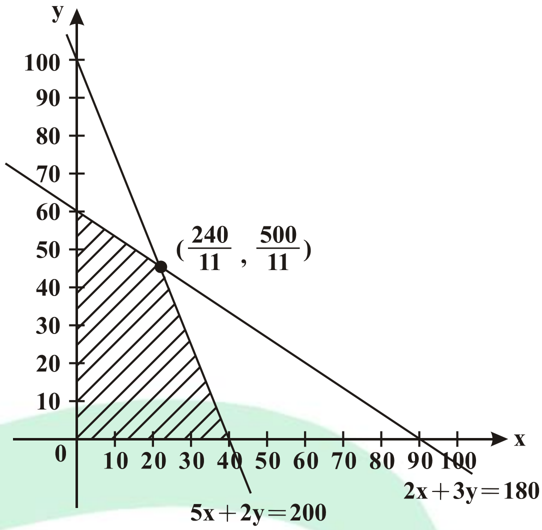
由(1)∩ (2) $-\dfrac{1}{3}<k<\dfrac{1}{2}$ 或 $3<k<5$

19.

	大豆	玉米	獲利
豬飼料	5	2	22
雞飼料	2	3	44

假設豬飼料 x 包，雞飼料 y 包

$\begin{cases} x \geqq 0, \quad y \geqq 0 \\ 5x+2y \leqq 200 \\ 2x+3y \leqq 180 \end{cases}$，又 $\begin{cases} 5x+2y=200 \\ 2x+3y=180 \end{cases}$



	$f(x, y)=22x+44y$
(0 , 0)	0
(40 , 0)	880
(21 , 46)	2486
(22 , 45)	2464
(0 , 60)	2640

$\Rightarrow (x, y) = (\frac{240}{11}, \frac{500}{11}) \doteqdot (21.8, 45.4)$

$\therefore$ 靠近$(\frac{240}{11}, \frac{500}{11})$且符合條件之整數點為(21 , 46)，(22 , 45)

其目標函數為 $f(x, y) = 22x + 44y$

20. $(a-1)x^2 + a^3x + (a^2+a+1) = 0$ 　2 相同實根

$\Rightarrow$ 判別式：$(a^3)^2 - 4(a-1)(a^2+a+1) = 0$

$\Rightarrow (a^3)^2 - 4(a^3-1) = 0$ 令 $a^3 = x$ 　$\Rightarrow x^2 - 4(x-1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$ 　$\Rightarrow (x-2)^2 = 0$ 　$\therefore x - 2 = 0$，$x = 2$

$\Rightarrow a^3 = 2$ 　$\therefore a = \sqrt[3]{2}$

21. $a < b < c$，a、b、c 均為 1、2、3、4、5、6 中的數字，且其和 $a+b+c$ 為 5 的倍數

a	b	c	
1	3	6	$a+b+c=10$
1	4	5	
2	3	5	
4	5	6	$a+b+c=15$

$P = \frac{1}{4}$

22. $C^{10}_3 \times C^{10}_7 = 120 \times 120 = 14400$

10 男選 3 男　10 女選 7 女

23. 點到(3 , 4)到圓(一般式)：$x^2 + y^2 - 2x + 3y + \frac{1}{2} = 0$ 之切線段長

$= \sqrt{3^2+4^2-6+12+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{63}{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$

24. $a_1 \cdot a_3 = a_1 \times a_1 \times (-2)^2 = 12 \quad \Rightarrow a_1^2 = 3$

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = a_1^2 + (-2a_1)^2 + (4a_1)^2 + (-8a_1)^2 = 85a_1^2 = 255$

25. $\sum_{k=1}^{10}(2^k+3k+2) = \sum_{k=1}^{10}2^k+3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}2 = \frac{2\times(2^{10}-1)}{2-1} + 3\times\frac{10\times 11}{2} + 20 = 2231$