107 學年度四技二專統一入學測驗

數學(C) 試題

數學 C 參考公式

1. 首項為 a_1，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S_n = \dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a_1，公比為 $r(r\neq 1)$的等比數列前 n 項之和為 $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

2. △ABC 的面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs$，其中 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$，r 為內切圓半徑

3. 圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 的參數式為 $\begin{cases} x=h+r\cos\theta \\ y=k+r\sin\theta \end{cases}$，其中 $0\leqq\theta<2\pi$，式子中的θ 為參數

4. 點 $P(x_0, y_0)$到直線 L：$ax+by+c=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5. 三角函數的二倍角公式：

   $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

   $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

1. 已知直線 L_1 通過(2 , 3)、(1 , 5)兩點，且直線 L_2 的 x 截距是 1、y 截距是 4。若 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1 與 m_2，則下列何者正確？

   (A)$0<m_1<m_2$　(B)$m_1<0<m_2$　(C)$m_2<0<m_1$　(D)$m_2<m_1<0$。

2. 若兩直線 $3x+4y=6$ 與 $9x+12y=k$ 的距離為 2，則 k 的值可能為下列何者？

   (A)-48　(B)-12　(C)10　(D)24。

3. 設 b_1、b_2、b_3、c_1、c_2 及 c_3 均為實數，若二階行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 13$、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 7$、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$，則三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$ ？

   (A)5　(B)13　(C)25　(D)33。

4. 某線上遊戲每場比賽可得的分數分別為 0 分、1 分、2 分、3 分，現在 A , B, C 三人分別玩此線上遊戲 20 場，得分情形如表(一)。若 a , b , c 分別為三人得分的平均分數，則下列何者正確？

(A)$a > b$　(B)$c > a$　(C)$b > c$　(D)$c + 0.5 = a$。

表(一)

得分＼人	0 分	1 分	2 分	3 分
A	3 場	8 場	5 場	4 場
B	5 場	4 場	6 場	5 場
C	6 場	5 場	3 場	6 場

5. 坐標平面上滿足不等式 $\begin{cases} 2x+y \leqq 10 \\ x+2y \leqq 8 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \end{cases}$ 的區域面積為何？

(A)12　(B)13　(C)15　(D)16。

6. 若編號為 1 , 2 , 3 ,…, 10 的十顆羽毛球中，任意取出三顆作為比賽用球，則編號 2 與編號 3 均被取出的機率為何？

(A)$\frac{1}{20}$　(B)$\frac{1}{15}$　(C)$\frac{3}{20}$　(D)$\frac{3}{10}$。

7. 設三角形三邊長分別為 5、6、7，若三角形面積為 A，內切圓半徑為 r，則 $A \cdot r$ = ？

(A)24　(B)35　(C)105　(D)210。

8. $\cos 0^\circ + \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \ldots + \cos 350^\circ + \cos 360^\circ =$ ？

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3。

9. 若 $f(x) = x^4 - x^3 + kx^2 - 2$ 為整係數多項式，其中 $k > 0$ 且 $f(x)$有整係數一次因式 $x - h$，則 $k + h =$ ？

(A)3　(B)2　(C)1　(D)0。

10. 設 $\begin{cases} 3x+5y+z=15 \\ 2x+4y+z=12 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$，則 $y =$ ？

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5。

11. 已知 $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$，且 $\bar{z}$ 為其共軛複數。若 $\frac{1+z}{1+\bar{z}} = a + bi$，其中 a , b 為實數，則點(a , b)在第幾象限？

(A)一　(B)二　(C)三　(D)四。

12. 若 $x=\dfrac{\log_{10}7}{\log_{10}9}$ ，則 $81^x=$ ？

(A)3　(B)7　(C)25　(D)49。

13. $\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+2)=$ ？

(A)1268　(B)1298　(C)2017　(D)2231。

14. 若從 11 件相異物中分別取出 5、6、7 件的組合數分別為 A、B、C，而從 12 件相異物中取出 6 件的組合數為 D，則下列何者正確？

(A)B > A　(B)C > A　(C)D = A + B　(D)D = B + C。

15. 設點 O_1 為圓 $C: x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 之圓心。今以另一點 O_2 為圓心、$\overline{O_1O_2}$ 為半徑作一圓，且此圓與圓 C 交於 A、B 兩點。若 $\overline{AO_2}=3$，則 $\overline{AB}=$ ？

(A)$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(B)$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　(C)$2\sqrt{2}$　(D)$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$。

16. $\int_{-4}^{0}|2x+5|\,dx=$ ？

(A)$\dfrac{17}{2}$　(B)8　(C)$\dfrac{17}{4}$　(D)4。

17. 若直線 L 過點(9 , 5)，且與函數 y = f(x)的圖形相切於點(3 , 1)，則 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=$ ？

(A)$\dfrac{1}{3}$　(B)$\dfrac{2}{3}$　(C)$\dfrac{3}{2}$　(D)3。

18. 若函數 f(x)的導函數 $f'(x)=x^2-2x-3$，且 $f(0)=6$，則 f(x)的相對極小值為何？

(A) - 5　(B) - 4　(C) - 3　(D) - 2。

19. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(4x-1)^3dx=$ ？

(A)$\dfrac{1}{16}$　(B)$\dfrac{1}{12}$　(C)$\dfrac{1}{4}$　(D)$\dfrac{1}{3}$。

20. 若一元二次方程式 $x^2+(a-5)x+a+3=0$ 有兩正根,滿足 a 的實數解為 $m<a\leqq n$，則 $m+n=$ ？

(A) - 4　(B) - 3　(C) - 2　(D)1。

21. 若 $\tan 19^\circ=a$，則 $\sin 2018^\circ=$ ？

(A)$\dfrac{-2}{1+a^2}$　(B)$\dfrac{-2a}{1+a^2}$　(C)$\dfrac{a}{1+a^2}$　(D)$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$。

22. 設 $f(x)=4\sin x+\cos(2x)+7$ 的最小值為 m，最大值為 M，則 $m+M=$？

(A) -7　(B)1　(C)12　(D)21。

23. 設 $a=\log_{0.3}0.5$、$b=\log_{3}5$、$c=\log_{30}50$，則 a、b、c 大小順序為何？

(A)$c>b>a$　(B)$b>a>c$　(C)$b>c>a$　(D)$a>b>c$。

24. 同時投擲四個公正骰子，點數 3 出現至多一次的情形共有幾種？

(A)1125　(B)1185　(C)1245　(D)1365。

25. 設 $P(x, y)$為圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 上的動點，若 $4x+3y+5$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$？

(A) -5　(B)0　(C)5　(D)10。

【解答】

1.(D) 2.(B) 3.(A) 4.(C) 5.(B) 6.(B) 7.(A) 8.(B) 9.(A) 10.(B)
11.(D) 12.(D) 13.(D) 14.(C) 15.(D) 16.(A) 17.(B) 18.(C) 19.(A) 20.(C)
21.(B) 22.(C) 23.(C) 24.(A) 25.(D)

107 學年度四技二專統一入學測驗

數學(C) 試題詳解

1.(D)	2.(B)	3.(A)	4.(C)	5.(B)	6.(B)	7.(A)	8.(B)	9.(A)	10.(B)
11.(D)	12.(D)	13.(D)	14.(C)	15.(D)	16.(A)	17.(B)	18.(C)	19.(A)	20.(C)
21.(B)	22.(C)	23.(C)	24.(A)	25.(D)					

1. $m_1=\dfrac{3-5}{2-1}=-2$

   $L_2\begin{cases}x\text{截距}1\Rightarrow(1,0)\\ y\text{截距}4\Rightarrow(0,4)\end{cases}\quad \therefore\ m_2=\dfrac{0-4}{1-0}=-4$

   故：$m_2<m_1<0$

2. $\begin{cases}9x+12y=18\\ 9x+12y=k\end{cases}$ d(平行線) = 2 $\Rightarrow \dfrac{|k-18|}{\sqrt{9^2+12^2}}=2 \Rightarrow |k-18|=30$

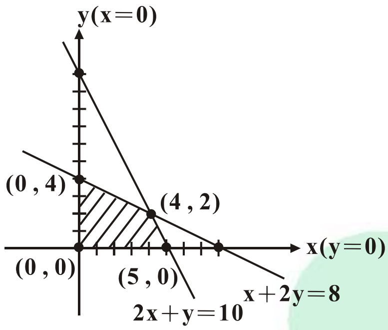
   $\Rightarrow k-18=\pm 30 \quad \Rightarrow k=48 \text{ or } k=-12$

3. $$\begin{array}{c}\text{降階}\\ \downarrow\end{array}$$
   $$\begin{vmatrix}1 & b_1 & c_1\\ 2 & b_2 & c_2\\ 3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=1\cdot 13-2\cdot 7+3\cdot 2=5$$

4. $a=\dfrac{3\cdot0+8\cdot1+5\cdot2+4\cdot3}{20}=\dfrac{30}{20}$

   $$\left.\begin{aligned}b&=\dfrac{5\cdot0+4\cdot1+6\cdot2+5\cdot3}{20}=\dfrac{31}{20}\\ c&=\dfrac{6\cdot0+5\cdot1+3\cdot2+6\cdot3}{20}=\dfrac{29}{20}\end{aligned}\right\}b>c$$

5. 區域面積 $= \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}|26| = 13$



6. 樣本空間 $= C_3^{10} = 120$

欲求情形數 $\Rightarrow$ 自 1 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 中任取一球搭配 $\begin{cases} \text{編號2} \\ \text{編號3} \end{cases} \Rightarrow C_1^8 = 8$

$\therefore\ P = \dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$

7. $S = \dfrac{5+6+7}{2} = 9$

$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$

$A = r \cdot S \quad \Rightarrow 6\sqrt{6} = r \cdot 9 \quad \Rightarrow r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

故 $A \cdot r = 6\sqrt{6} \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{3} = 24$

8. 原式 $= \cos 0^\circ + \cos 90^\circ + \cos 180^\circ + \cos 270^\circ + \cos 360^\circ = 1 + 0 + (-1) + 0 + 1 = 1$

9. 根可能為±1，±2

$f(1) = 0 \quad \Rightarrow 1 - 1 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow k = 2 \quad \Rightarrow$ 因式 $x - 1$，$h - 1$；故 $k + h = 3$

$f(-1) = 0 \quad \Rightarrow 1 + 1 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow k = 0$(不合)

$f(2) = 0 \quad \Rightarrow 16 - 8 + 4k - 2 = 0 \quad \Rightarrow k = -\dfrac{3}{2}$(不合)

$f(-2) = 0 \quad \Rightarrow 16 + 8 + 4k - 2 = 0 \quad \Rightarrow k = -\dfrac{11}{2}$(不合)

10. $\begin{cases} 3x+5y+z=15 \ldots (1) \\ 2x+4y+z=12 \ldots (2) \\ 5x+y+2z=3 \ldots (3) \end{cases}$

由(1) - (2)：$x + y = 3 \ldots (4)$

(3) - (2)×2：$x - 7y = -21 \ldots (5)$

(4) - (5)：$8y = 24 \quad \Rightarrow y = 3$

11. 《法一》$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\frac{1+z}{1+\bar{z}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{(3-\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}{(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}=\frac{9-6\sqrt{3}i+3i^2}{9-3i^2}$$

$$=\frac{6-6\sqrt{3}i}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow (a , b)\in$ Ⅳ

《法二》$\because |z|=1 \Rightarrow z\,.\,\bar{z}=1$

$$\frac{1+z}{1+\bar{z}}=\frac{z\cdot\bar{z}+z}{1+\bar{z}}=\frac{z(\bar{z}+1)}{1+\bar{z}}=z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow (a , b)\in$ Ⅳ

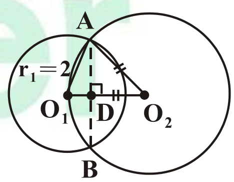
12. $x=\frac{\log_{10}7}{\log_{10}9}=\log_9 7$

$81^x=81^{\log_9 7}=81^{\log_{81}49}=49$

13. $\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+2)=\sum_{n=1}^{10}2^n+3\sum_{n=1}^{10}n+\sum_{n=1}^{10}2=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}+3\cdot\frac{10(10+1)}{2}+2\cdot 10=2231$

14.
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A=C_5^{11}=462\\ B=C_6^{11}\end{array}\right\}C_5^{11}=C_6^{11}\quad\Rightarrow A=B\\ C=C_7^{11}=C_4^{11}=330\\ D=C_6^{12}=924\end{array}\right\}D=A+B$$

15. $C：x^2+y^2-6x+4y+9=0\quad\Rightarrow\begin{cases}O_1(3,-2)\\ r_1=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+4^2-4\cdot 9}=2\end{cases}$



$\triangle AO_1O_2$ 之三邊為 2 , 3 , 3 $\quad\Rightarrow\begin{cases}S=\frac{2+3+3}{2}=4\\ \triangle AO_1O_2=\sqrt{4\cdot 2\cdot 1\cdot 1}=2\sqrt{2}\end{cases}$

$\triangle AO_1O_2=\frac{\overline{O_1O_2}\cdot\overline{AD}}{2}\quad\Rightarrow 2\sqrt{2}=\frac{3\cdot\overline{AD}}{2}\quad\Rightarrow\overline{AD}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

故 $\overline{AB}=2\overline{AD}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

16. $\int_{-4}^{0}|2x+5|\,dx = \int_{-\frac{5}{2}}^{0}(2x+5)dx + \int_{-4}^{-\frac{5}{2}}(-2x-5)dx$

$$= (2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x)\Big|_{-\frac{5}{2}}^{0} + (-2\cdot\frac{x^2}{2} - 5x)\Big|_{-4}^{-\frac{5}{2}}$$

$$= (x^2 + 5x)\Big|_{-\frac{5}{2}}^{0} + (-x^2 - 5x)\Big|_{-4}^{-\frac{5}{2}}$$

$$= 0 - (\frac{25}{4} - \frac{25}{2}) + (-\frac{25}{4} + \frac{25}{2}) - (-16 + 20) = \frac{17}{2}$$

17. 切線 L 過$(9, 5)$，$(3, 1)$ $\Rightarrow m_{切} = \frac{5-1}{9-3} = \frac{2}{3}$；切點$(3, 1)$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = f'(3) = m_{切} = \frac{2}{3}$

18. 極值發生 $\Rightarrow f'(x) = 0$ $\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ or $x = -1$

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$；$f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^2 - 2x - 3)dx = \frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + c$

$f''(x) = 2x - 2$ $f(0) = 6$ $\Rightarrow c = 6$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 6$

$f''(3) > 0$ $\Rightarrow$ 極小點$(3, f(3)) = (3, -3)$ $\Rightarrow$ 相對極小值為 -3

$f''(-1) < 0$ $\Rightarrow$ 極大點

19. 令 $u = 4x - 1\begin{cases} x=\frac{1}{2} \Rightarrow u=1 \\ x=\frac{1}{4} \Rightarrow u=0 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 4$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{4}$

$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(4x-1)^3dx = \int_0^1 u^3\cdot\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{16} - \frac{0}{16} = \frac{1}{16}$

20. $x^2 + (a-5)x + a + 3 = 0$

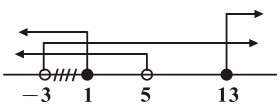
(1)二根和 $= 5 - a > 0$ $\Rightarrow a < 5$

(2)二根積 $= a + 3 > 0$ $\Rightarrow a > -3$

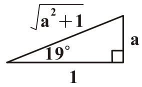
(3)$B^2 - 4AC \geqq 0$ $\Rightarrow (a-5)^2 - 4\cdot 1\cdot (a+3) \geqq 0$ $\Rightarrow a^2 - 14a + 13 \geqq 0$

$\Rightarrow (a-1)(a-13) \geqq 0$ $\Rightarrow a \geqq 13$ or $a \leqq 1$

由(1)∩(2)∩(3)

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow -3 < a \leqq 1$ $\Rightarrow m = -3$，$n = 1$ $\Rightarrow m + n = -2$

21. $\tan 19^\circ = \dfrac{a}{1}$ $\Rightarrow$ 

$\sin 2018^\circ = \sin 218^\circ = \sin(180^\circ + 38^\circ) = -\sin 38^\circ = -2\cdot \sin 19^\circ \cdot \cos 19^\circ$

$= -2\cdot \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{-2a}{1+a^2}$

22. $f(x) = 4\sin x + \cos(2x) + 7 = 4\sin x + 1 - 2\sin^2 x + 7 = -2\sin^2 x + 4\sin x + 8$

$= -2(\sin^2 x - 2\sin x + 1) + 8 + 2 = -2(\sin x - 1)^2 + 10$

當 $\left.\begin{array}{l} \sin x = 1 \text{時有} M = 10 \\ \sin x = -1 \text{時有} m = 2 \end{array}\right\} m + M = 12$

23. $a = \log_{0.3} 0.5 = \dfrac{\log 0.5}{\log 0.3} = \dfrac{\log 5 - \log 10}{\log 3 - \log 10} = \dfrac{-0.3010}{-0.5229} = \dfrac{0.3010}{0.5229} \fallingdotseq 0.58$

$b = \log_3 5 = \dfrac{\log 5}{\log 3} = \dfrac{0.6990}{0.4771} \fallingdotseq 1.47$

$c = \log_{30} 50 = \dfrac{\log 50}{\log 30} = \dfrac{\log 5 + \log 10}{\log 3 + \log 10} = \dfrac{1.6990}{1.4771} \fallingdotseq 1.15$

故 $b > c > a$

24. (1)都沒有點數 3 $\Rightarrow \underset{\text{A}}{5} \times \underset{\text{B}}{5} \times \underset{\text{C}}{5} \times \underset{\text{D}}{5} = 625$（骰子：A B C D）

(2)只有 1 個點數 3

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow A_{3\text{點}}；B, C, D_{\text{非}3\text{點}} \cdots 1\times 5\times 5\times 5 = 125 \\ B_{3\text{點}}；A, C, D_{\text{非}3\text{點}} \\ C_{3\text{點}}；A, B, D_{\text{非}3\text{點}} \\ D_{3\text{點}}；A, B, C_{\text{非}3\text{點}} \end{array}\right\} 125\times 4 = 500 \end{array}\right\} 1125$$

25. $C：x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ $\begin{cases} O(3,-4) \\ r = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+8^2} = 5 \end{cases}$

$P\begin{cases} x = 3 + 5\cdot\cos\theta \\ y = -4 + 5\cdot\sin\theta \end{cases} (\theta \in R)$

所求 $= 4x + 3y + 5 = 4(3 + 5\cos\theta) + 3(-4 + 5\sin\theta) + 5 = 15\sin\theta + 20\cos\theta + 5$

$-\sqrt{15^2+20^2} + 5 \leqq 15\sin\theta + 20\cos\theta + 5 \leqq \sqrt{15^2+20^2} + 5$

$-20 \leqq$ 所求 $\leqq 30$

故 $M = 30$，$m = -20$ $\Rightarrow M + m = 10$