104 學年度四技二專統一入學測驗
數學(C) 試題

1. 已知a , b為實數，若不等式$x^2+ax\leqq b$之解為$-5\leqq x\leqq 3$，則$a+b=$？
(A)-17 (B)-13 (C)13 (D)17。

2. 下列方程式所對應的圖形中，何者恆在x軸的上方？
(A)$y=5x^2-3x+1$ (B)$y=3x^2+5x-1$ (C)$y=x^2-5x+3$ (D)$y=3x^2+x-5$。

3. 已知 33 位遊客在科學教育館參觀，他們的年齡及人數分佈如表(一)。若這群遊客年齡的中位數為 32 歲，則這群遊客中哪個年齡的人數最多？
(A)8 (B)12 (C)54 (D)60。

表(一)

年齡(歲)	8	12	32	54	60	62
人數(人)	7	a	1	b	5	1

4. 若二元一次方程組$\begin{cases}2x+3y=-4\\3x-4y=5\end{cases}$的解為 $x=a$、$y=b$，則 $a+b=$？
(A)$\dfrac{-23}{17}$ (B)$\dfrac{-21}{17}$ (C)$\dfrac{21}{17}$ (D)$\dfrac{23}{17}$。

5. 將$(x^4-3x^3+2x-5)(x^3-2)(x+3)$乘開化簡後，$x^3$項的係數為何？
(A)-5 (B)-3 (C)3 (D)5。

6. 已知 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，則$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=$？
(A)$2(\sqrt{3}-1)$ (B)$4(\sqrt{3}-1)$ (C)$2(\sqrt{3}+1)$ (D)$4(\sqrt{3}+1)$。

7. 若 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，則$\sqrt{2-2\cos 2\theta}=$？
(A)$\dfrac{1}{3}$ (B)$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (C)$\dfrac{2}{3}$ (D)$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$。

8. 已知平面上四點坐標為 A(57 , 23)、B(7 , -2)、C(5 , 12)、D(x , y)。若向量$\overrightarrow{AD}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，則 $x+y=$？
(A)-4 (B)-2 (C)2 (D)4。

9. 已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a , b 為實數，若$(2+i)(a+bi)=15+5i$，則 $a+b=$？
(A)4 (B)6 (C)8 (D)10。

10. 從 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 這八個數字中，任取 3 個相異數字，若每個數字被取中的機會均相等，則取出之 3 個數字中，最大的數字大於 6 的機率為何？
(A) $\frac{5}{14}$　(B) $\frac{5}{12}$　(C) $\frac{7}{12}$　(D) $\frac{9}{14}$ 。

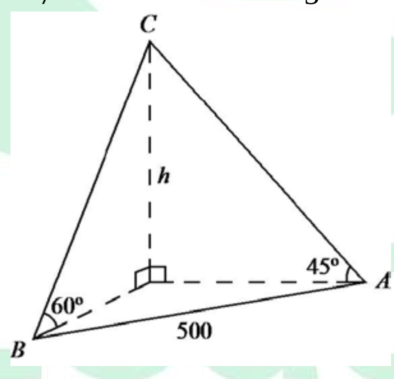
11. 若在聯立不等式 $\begin{cases} 2x-y \geqq 0 \\ x+3y \leqq 7 \\ x-4y \leqq 0 \end{cases}$ 的條件下，目標函數 $f(x, y)=2x-3y-2$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 M＋m＝？
(A)－5　(B)－3　(C)3　(D)5。

12. 求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{h}$ ＝？
(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

13. 求 $\int_{-3}^{3}(1-2x)(1+2x)dx$ ＝？
(A)－66　(B)－33　(C)33　(D)66。

14. 已知m、n為整數，若 $m\log_{500}5+n\log_{500}\sqrt{2}=1$，則m＋n＝？
(A)7　(B)8　(C)9　(D)10。

15. 今有人欲測一山的高度，當此人在此山的正東方一點 A，測得山頂 C 的仰角為 45°，又當他在山的南 60°西方向一點 B，測得山頂 C 的仰角為 60°，如圖(一)所示。若 A、B 兩點相距 500 公尺，則此山高 h 為多少公尺？
(A) $\frac{500}{3}\sqrt{3}$　(B) $\frac{500}{7}\sqrt{21}$　(C) $\frac{500}{3}\sqrt{21}$　(D) $500\sqrt{3}$ 。



圖(一)

16. 已知 P(a , 1)、Q(－1 , b)為平面上兩點。若 P 為直線 L：3x－4y＝2 上一點，且直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與直線 L 垂直，則 a＋b＝？
(A)7　(B)9　(C)11　(D)13。

17. 已知a , b , c , d為實數，若 $2x^3+x^2-5x-3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，則 abcd＝？

(A)－20　(B)－10　(C)10　(D)20。

18. 已知四個正數 a , b , c , d 為一等比數列，若 $a+b=20$，$a+b+c+d=65$，則 a＝？

(A)5　(B)6　(C)7　(D)8。

19. 橢圓 $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$ 之兩焦點在哪兩個象限？

(A)一、二　(B)二、三　(C)三、四　(D)一、四。

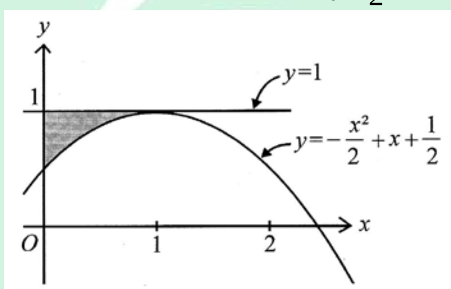
20. 已知a , b為實數，若過函數 $f(x)=ax^2+bx$ 圖形上一點P(1, 5)的切線斜率為 3，則 $f'(2)$＝？

(A)－3　(B)－1　(C)1　(D)3。

21. 由 $y=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$，y＝1 和 x＝0 所圍成的區域，如圖(二)陰影部分，則此區域面積可由下列何式求得？

(A) $\int_0^1(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2})dx$　(B) $\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2})dx$

(C) $\int_0^1(-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2})dx$　(D) $\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2})dx$。



圖(二)

22. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，則 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix}=$？

(A)－4　(B)－2　(C)2　(D)4。

23. 已知a , b為實數，且 $3^a=5$，$5^b=9$，則ab＝？

(A) $\log_{15}45$　(B) $\log_3 5$　(C)2　(D)3。

24. 已知三角形的三邊長分別為 3 公分、3 公分、4 公分，則此三角形之外接圓半徑為何？

(A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　(B) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　(C) $\frac{7\sqrt{5}}{10}$　(D) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$。

25. 將 6 顆相同紅球分給三個人且全部分完，若每人至少分到一顆紅球，則共有多少種分法？
(A)6　(B)10　(C)20　(D)27。

【解答】

1.(D)	2.(A)	3.(C)	4.(A)	5.(C)	6.(C)	7.(C)	8.(A)	9.(B)	10.(D)
11.(B)	12.(D)	13.(A)	14.(A)	15.(B)	16.(A)	17.(C)	18.(D)	19.(D)	20.(B)
21.(D)	22.(B)	23.(C)	24.(D)	25.(B)					

104 學年度四技二專統一入學測驗
數學 (C) 試題詳解

1.(D)	2.(A)	3.(C)	4.(A)	5.(C)	6.(C)	7.(C)	8.(A)	9.(B)	10.(D)
11.(B)	12.(D)	13.(A)	14.(A)	15.(B)	16.(A)	17.(C)	18.(D)	19.(D)	20.(B)
21.(D)	22.(B)	23.(C)	24.(D)	25.(B)					

1. $-5 \leqq x \leqq 3 \quad \Rightarrow (x+5)(x-3) \leqq 0 \quad \Rightarrow x^2+2x-15 \leqq 0$

   $\Rightarrow \begin{cases} x^2+2x \leqq 15 \\ x^2+ax \leqq b \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=15 \end{cases} \quad \Rightarrow a+b=17$

2. 恆在 x 軸上方 $\quad \Rightarrow y>0$(y 恆正) $\quad \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases}$

   $\left.\begin{array}{l} (A)y=5x^2-3x+1 \quad \Rightarrow b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 5\cdot 1<0 \\ (B)y=3x^2+5x-1 \quad \Rightarrow b^2-4ac=5^2-4\cdot 3(-1)>0 \\ (C)y=x^2-5x+3 \quad \Rightarrow b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 3>0 \\ (D)y=3x^2+x-5 \quad \Rightarrow b^2-4ac=1^2-4\cdot 3(-5)>0 \end{array}\right\}$ 故選(A)

3. (1)全部 33 位 $\quad \Rightarrow$ 中位數為第 17 位 $\quad \Rightarrow a=9$ 代入(2)

   (2)$7+a+1+b+5+1=33 \quad \Rightarrow b=10 \quad \Rightarrow$ 人數最多為 54 歲

4. $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x-4y=5 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 8x+12y=-16 \cdots\cdots(1) \\ 9x-12y=15 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

   由(1)(2) $\quad \Rightarrow 17x=-1 \quad \Rightarrow x=-\dfrac{1}{17}$ 代入(1)；$y=-\dfrac{22}{17}$

   $a+b=x+y=-\dfrac{23}{17}$

5. $(x^4-3x^3+2x-5)(x^3-2)(x+3)$

   $=(x^4-3x^3+2x-5)(x^4+3x^3-2x-6)$

   x^3項係數$=18-15=3$

6. $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}-1}=2(\sqrt{3}+1)$$

7. $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2(\frac{1}{3})^2=\frac{7}{9}$

$$\sqrt{2-2\cos 2\theta}=\sqrt{2-2\cdot\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

8. $\overrightarrow{AD}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$$(x-57, y-23)=\frac{7}{4}(-50,-25)-\frac{3}{4}(-52,-11)=(-\frac{194}{4},-\frac{142}{4})$$

故 $\begin{cases} x-57=-\dfrac{194}{4} \\ y-23=-\dfrac{142}{4} \end{cases}$ ⇒兩式相加：$x+y-80=-84$ ⇒ $x+y=-4$

9. $(2+i)(a+bi)=15+5i$

$$\Rightarrow a+bi=\frac{15+5i}{2+i}=\frac{(15+5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{30-15i+10i-5i^2}{4-i^2}=7-i$$

故：$a=7$，$b=-1$ ⇒ $a+b=6$

10. 樣本空間$=C^8_3=56$

欲求情形數：(1)最大數為 8 ⇒自 1～7 取 2 數 ⇒ $C^7_2=21$

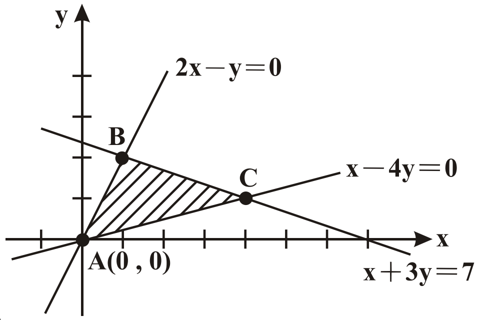
(2)最大數為 7 ⇒自 1～6 取 2 數 ⇒ $C^6_2=15$

$$P=\frac{21+15}{56}=\frac{9}{14}$$

11. B $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

C $\begin{cases} x-4y=0 \\ x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

$$f(x\,,y) = 2x-3y-2$$
$$\xlongequal{A(0\,,0)} -2$$
$$\left.\begin{aligned} &\xlongequal{B(1\,,2)} -6\cdots\cdots m \\ &\xlongequal{C(4\,,1)} 3\cdots\cdots M \end{aligned}\right\} M+m=-3$$



12. $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

13. $$\int_{-3}^{3}(1-2x)(1+2x)dx=\int_{-3}^{3}(1-4x^2)dx=\left(x-4\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3}$$

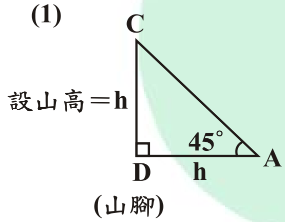
$$=(3-36)-(-3+36)=-66$$

14. $m\log_{500}5+n\log_{500}\sqrt{2}=1 \quad \Rightarrow \log_{500}5^m+\log_{500}(2^{\frac{1}{2}})^n=1$

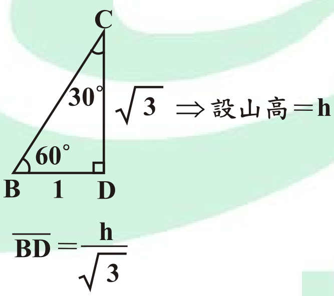
$\Rightarrow \log_{500}(5^m\cdot 2^{\frac{n}{2}})=\log_{500}500 \quad \Rightarrow 5^m\cdot 2^{\frac{n}{2}}=500=5^3\cdot 2^2 \quad \Rightarrow m=3，n=4$

$\Rightarrow m+n=7$

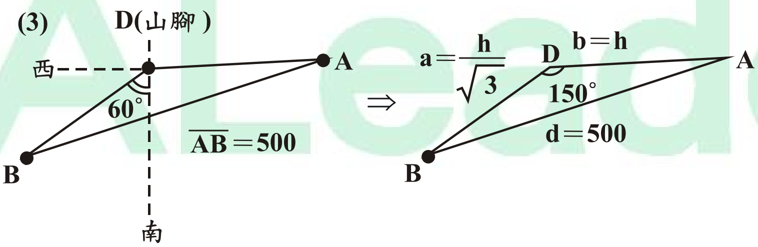
15. (1)



(2)



(3)



$$\cos D=\frac{a^2+b^2-d^2}{2\cdot a\cdot b}\quad\Rightarrow-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\frac{h^2}{3}+h^2-250000}{2\cdot\frac{h}{\sqrt{3}}\cdot h}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{3}h^2-250000=-h^2\quad\Rightarrow\frac{7}{3}h^2=250000\quad\Rightarrow h^2=\frac{750000}{7}$$

$$\Rightarrow h=\frac{500\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{500\sqrt{21}}{7}$$

16. (1)P(a , 1)代入L：$3x-4y=2\quad\Rightarrow 3a-4=2\quad\Rightarrow a=2$

(2)L：$3x-4y=2\quad\Rightarrow m_L=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$

P(2 , 1)，Q(−1 , b)

$\overleftrightarrow{PQ}\perp L\quad\Rightarrow m_{\overleftrightarrow{PQ}}\cdot m_L=-1\quad\Rightarrow m_{\overleftrightarrow{PQ}}=-\frac{4}{3}\quad\Rightarrow\frac{1-b}{2-(-1)}=-\frac{4}{3}$

$\Rightarrow 1-b=-4\quad\Rightarrow b=5$，由(1)(2)：$a+b=7$

17.

$$\begin{array}{lrrrr|r}
 & 2 & 1 & -5 & -3 & -1 \\
+) & & -2 & 1 & 4 & \\
\hline
 & 2 & -1 & -4 & 1\rightarrow d & \\
+) & & -2 & 3 & & \\
\hline
 & 2 & -3 & -1\rightarrow c & & \\
+) & & -2 & & & \\
\hline
a\leftarrow & 2 & -5\rightarrow b & & &
\end{array}$$

18. 令$b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$

(1)$a+b=20\quad\Rightarrow a+ar=a(1+r)=20$

(2)$a+b+c+d=65\quad\Rightarrow c+d=45\quad\Rightarrow ar^2+ar^3=45\quad\Rightarrow ar^2(1+r)=45$

由$\frac{(2)}{(1)}\quad\Rightarrow r^2=\frac{9}{4}\quad\Rightarrow r=\pm\frac{3}{2}$(負不合)

代$r=\frac{3}{2}$至(1)$\quad\Rightarrow a(1+\frac{3}{2})=20\quad\Rightarrow\frac{5a}{2}=20\quad\Rightarrow a=8$

19. $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$

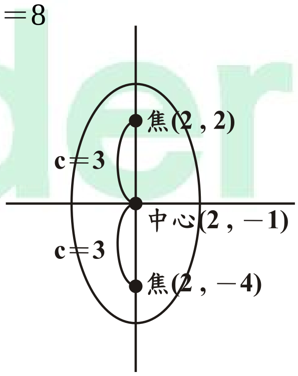
$\Rightarrow 25(x^2-4x+4)+16(y^2+2y+1)-284-100-16=0$

$\Rightarrow 25(x-2)^2+16(y+1)^2=400$

$\Rightarrow\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

$\Rightarrow$中心(2 , −1)，$a=5$，$b=4$

利用：$a^2=b^2+c^2$，故$c=3$



由圖知　⇒焦點落在一、四象限

20. (1)P(1 , 5)代入$y=ax^2+bx \quad \Rightarrow 5=a+b$

(2)$f(x)=ax^2+bx$，$f'(x)=2ax+b$，$m_{切}=f'(1) \quad \Rightarrow 3=2a+b$

由(2)−(1)：$a=-2$，$b=7 \quad \Rightarrow f'(x)=-4x+7 \quad \Rightarrow f'(2)=-1$

21. 長度函數$=1-(-\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2})=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}$

由圖：區域面積$=\int_0^1(\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2})\,dx$

22. $$\overset{\times(-1)}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix}}=\overset{\times 2}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix}}=\overset{換}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

$$=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-2$$

23. $$\left.\begin{array}{l} (1)3^a=5 \quad \Rightarrow a=\log_3 5 \\ (2)5^b=9 \quad \Rightarrow b=\log_5 9 \end{array}\right\} ab=\log_3 5\cdot\log_5 9=\log_3 9=\log_3 3^2=2$$

24. $S=\dfrac{3+3+4}{2}=5$；設$\begin{cases} a=3 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$

△面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{5\cdot 2\cdot 2\cdot 1}=2\sqrt{5}$

△面積$=\dfrac{abc}{4R} \quad \Rightarrow 2\sqrt{5}=\dfrac{3\cdot 3\cdot 4}{4R} \quad \Rightarrow 2\sqrt{5}\,R=9 \quad \Rightarrow R=\dfrac{9}{2\sqrt{5}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{10}$

25. 甲、乙、丙三人皆先一顆紅球

⇒剩下 3 顆相同紅球任意分給 3 人

$\Rightarrow H_3^3=C_3^5=10$