102 學年度四技二專統一入學測驗
數學(C) 試題

1. 求 102 到 2013 之間，個位數字為 7 的正整數共有幾個？
(A)190 (B)191 (C)192 (D)193。

2. 已知m、n為實數，Q(x)為二次多項式。若$x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x^2-3x+2)Q(x)$，則 $2m+n=$？
(A)-6 (B)-2 (C)4 (D)8。

3. 若 $3^{x+2}=3^x+24\sqrt{3}$ ，則$x=$？
(A)$\frac{-1}{2}$ (B)1 (C)$\frac{3}{2}$ (D)2。

4. 已知$a>0$, $b>0$, $a\neq1$。若$a^5=b^3$，則$\log_a b=$？
(A)$\frac{-5}{3}$ (B)$\frac{-3}{5}$ (C)$\frac{3}{5}$ (D)$\frac{5}{3}$ 。

5. 求$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3})\,dx=$？
(A)$\frac{97}{36}$ (B)$\frac{49}{18}$ (C)$\frac{17}{6}$ (D)$\frac{26}{9}$ 。

6. 若△ABC 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=9$、$\overline{CA}=10$，則 $\cos(\angle A+\angle B)=$？
(A)$\frac{-13}{15}$ (B)$\frac{-7}{15}$ (C)$\frac{7}{15}$ (D)$\frac{13}{15}$ 。

7. 某生的測驗成績與相對上課時數如表(一)。若以上課時數為權數，則其 6 個科目的加權平均成績為何？
(A)71 (B)72 (C)73 (D)74。

科目	國文	英文	數學	歷史	地理	公民
成績	72	68	72	82	75	86
時數	5	4	4	2	2	2

表(一)

8. 設雙曲線的兩焦點分別為 $F(-3,2)$、$F'(5,2)$，且此雙曲線過點 $P(5,\frac{13}{3})$，則此雙曲線的貫軸長為何？
(A)3 (B)6 (C)7 (D)14。

9. 設向量$\vec{a}=(3,4)$，向量$\vec{b}\,//\,\vec{a}$ ，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-50$，則$|2\vec{a}+3\vec{b}|=$？
(A)20 (B)40 (C)60 (D)80。

10. 求多項式$(2x-1)^5(x+1)$之x^2項的係數為何？
(A)-30 (B)-20 (C)20 (D)30。

11. 已知 a＞0，且方程組 $\begin{cases} -x+3y=ax \\ 3x+y=ay \end{cases}$ 有無限多組解，則 a＝？

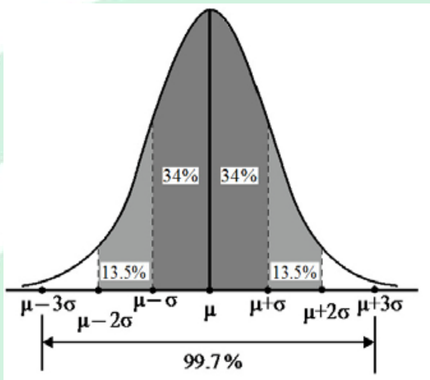
(A)1　(B)$\sqrt{2}$　(C)$\sqrt{5}$　(D)$\sqrt{10}$ 。

12. 已知θ為第三象限角，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，則 $\dfrac{2\sin\theta-1}{3+4\cos\theta}=$？

(A)$\dfrac{1}{31}$　(B)$\dfrac{13}{7}$　(C)11　(D)31。

13. 某校全體新生測量身高結果近似常態分配，如圖(一)。若身高的平均數μ為 170 公分，標準差σ為 4 公分，且全體新生中身高小於 166 公分的人數約為 120 人，則此校新生人數與下列何者最接近？

(A)375　(B)750　(C)1125　(D)1500。



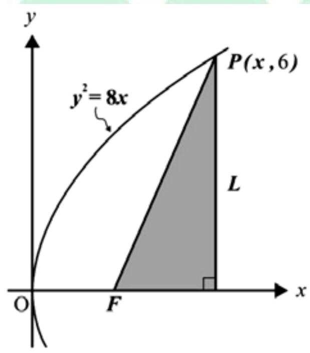
圖(一)

14. 已知甲、乙、丙三人搭同一班次火車，此班火車有 5 節車廂。若每人選擇搭乘各車廂的機率均為 $\frac{1}{5}$ ，則此三人分別在不同車廂的機率為何？

(A)$\dfrac{1}{25}$　(B)$\dfrac{2}{25}$　(C)$\dfrac{12}{25}$　(D)$\dfrac{24}{25}$ 。

15. 已知點P(x , 6)為拋物線$y^2=8x$上一點，F為此拋物線的焦點，L為過點P且與x軸垂直的直線，如圖(二)。求由$\overline{PF}$、L與x軸所圍成的三角形面積為何？

(A)$\frac{15}{2}$　(B)8　(C)$\dfrac{17}{2}$　(D)9。



圖(二)

16. 已知a、b為實數，$f(x)=(ax+b)^3$。若$f(2)=1$ 且$f'(2)=6$，則$a-b=$？

(A)-2　(B)-1　(C)3　(D)5。

17. 已知a、b為實數，$i=\sqrt{-1}$ 。若$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^8=a+bi$，則$a^2+b^2=$？

(A)16　(B)64　(C)256　(D)1024。

18. 若 $2+3\cos 2\theta=0$，則$\sin^4\theta-\cos^4\theta=$？

(A)$\frac{-\sqrt{5}}{3}$　(B)$\frac{-2}{3}$　(C)$\frac{2}{3}$　(D)$\frac{\sqrt{5}}{3}$ 。

19. 已知 a、b、c 為實數。若 $x\neq\frac{3}{2}$ 時，等式$\frac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2}=a+\frac{b}{2x-3}+\frac{c}{(2x-3)^2}$恆成立，則 $a+b+2c=$？

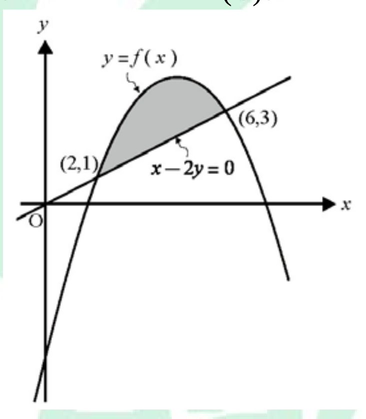
(A)-4　(B)-2　(C)2　(D)4。

20. 若三階行列式$\begin{vmatrix} x & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$之值為 3，則三階行列式$\begin{vmatrix} x+2 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$之值為何？

(A)-9　(B)-3　(C)3　(D)9。

21. 已知 $y=f(x)$與 $x-2y=0$ 相交於$(2,1)$、$(6,3)$兩點，如圖(三)。若陰影部份的面積為$\frac{16}{3}$ 且$\int_0^2 f(x)dx=\frac{-13}{3}$ ，則$\int_0^6 f(x)dx=$？

(A)7　(B)8　(C)9　(D)10。



圖(三)

22. 已知 a、b 為實數。若直線 $2x+ay+b=0$ 通過 $10x-2y+5=0$ 與 $6x-y+7=0$ 之交點，且斜率為 2，則 $a+b=$？

(A)-12　(B)-10　(C)10　(D)12。

23. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{5x^2-2x-3}, & x\neq 1\\ C, & x=1\end{cases}$。若 f 在 x＝1 處連續，則 C＝？

(A) $\dfrac{1}{8}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D)1。

24. 已知 L_1、L_2 為與直線 $3x+4y=0$ 平行的二直線。若 L_1 過點 $(-29, 23)$，L_2 過點 $(31, 23)$，則此二平行線間的距離為何？

(A)23　(B)36　(C)48　(D)60。

25. 已知k為實數，且二次方程式 $9x^2+(12k+18)x+(4k^2+12k+5)=0$ 有二實根。若其中一根大於 1，另一根小於 0，則k之範圍為何？

(A) $\dfrac{-5}{2}<k<-2$　(B) $-2<k<\dfrac{-3}{2}$　(C) $\dfrac{-3}{2}<k<-1$　(D) $-1<k<\dfrac{-1}{2}$。

102 學年度四技二專統一入學測驗
數學(C) 試題詳解

【解答】

1.(B)	2.(D)	3.(C)	4.(D)	5.(D)	6.(A)	7.(D)	8.(B)	9.(A)	10.(A)
11.(D)	12.(C)	13.(B)	14.(C)	15.(A)	16.(D)	17.(C)	18.(C)	19.(B)	20.(B)
21.(C)	22.(A)	23.(B)	24.(B)	25.(A)					

【詳解】

1. 分成(1)102～999；(2)1000～1999；(3)2000～2013

   (1) $\overset{1\sim9}{\boxed{}}\ \overset{0\sim9}{\boxed{}}\ \boxed{7}$ (2) $\boxed{1}\ \overset{0\sim9}{\boxed{}}\ \overset{0\sim9}{\boxed{}}\ \boxed{7}$

   方法：$9\times10\times1=90$ 方法：$1\times10\times10\times1=100$

   (3)2000～2013 符合者只有 2007，計 1 個

   由(1)(2)(3)知 $90+100+1=191$(個)

2. 令$f(x)=x^4-mx^3-x^2-5x+n$

   已知$x^2-3x+2|f(x)$，又$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

   必$x-1|f(x)$，$x-2|f(x)$ $\Rightarrow f(1)=0$，$f(2)=0$

   即$\begin{cases}1-m-1-5+n=0\\16-8m-4-10+n=0\end{cases}$

   可得 $2m+n=2(1)+(6)=8$

3. $3^{x+2}=3^x+24\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^2\cdot3^x-3^x=24\sqrt{3}\Leftrightarrow(9-1)3^x=24\sqrt{3}\Leftrightarrow3^x=3\sqrt{3}=3^{\frac{3}{2}}$

   知$x=\dfrac{3}{2}$

4. $a^5=b^3\Leftrightarrow(a^5)^{\frac{1}{3}}=(b^3)^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow b=a^{\frac{5}{3}}$

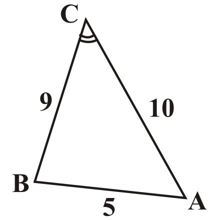
   所求$\log_a b=\log_a a^{\frac{5}{3}}=\dfrac{5}{3}$

5. $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3})\,dx=(x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3)\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{3}{2}}$

   $\displaystyle=[\frac{3}{2}-(\frac{-1}{2})]+\frac{1}{4}[(\frac{3}{2})^2-(\frac{-1}{2})^2]+\frac{1}{9}[(\frac{3}{2})^3-(\frac{-1}{2})^3]$

   $\displaystyle=[2]+\frac{1}{4}[2]+\frac{1}{9}[\frac{7}{2}]=\frac{26}{9}$

6. 由餘弦定理知 $\cos C=\dfrac{9^2\times 10^2-5^2}{2\times 9\times 10}=\dfrac{13}{15}$



所求 $\cos(\angle A+\angle B)=\cos(180^\circ-(\angle C))$

$=-\cos C=\dfrac{-13}{15}$

7. 權數總計 $5+4+4+2+2+2=19$

所求即$\dfrac{1}{19}[72\times 5+68\times 4+\cdots\cdots+86\times 2]$

$=80+\dfrac{1}{19}[(72-80)\times 5+(68-80)\times 4+\cdots\cdots+(86-80)\times 2]$

$=80+\dfrac{1}{19}[(-8)\times 5+(-12)\times 4+(-8)\times 4+(2)\times 2+(-5)\times 2+(6)\times 2]$

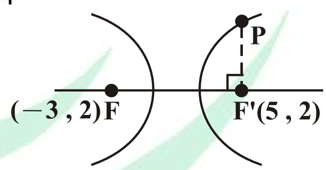
$=80+\dfrac{1}{19}[-114]=74$

8. 由雙曲線定義知$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a=$貫軸長

所求 $2a=\left|\sqrt{(5+3)^2+(\dfrac{13}{3}-2)^2}-\sqrt{(5-5)^2+(\dfrac{13}{3}-2)^2}\right|=\left|\dfrac{25}{3}-\dfrac{7}{3}\right|=6$

《另解》注意到F、F'在水平線上，$P(5,\dfrac{13}{3})$在F'正上方，P為正焦弦一端點。

$\begin{cases}\overline{FF'}=2c=8\\ \overline{PF'}=\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{13}{3}-2=\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c^2=a^2+b^2=4^2\\ 3b^2=7a\end{cases}$



$3a^2+3b^2=48\quad\Rightarrow 3a^2+7a-48=0$

$(a-3)(3a+16)=0$ 知$a=3$ or $\dfrac{-16}{3}$(不合)

所求貫軸長 $2a=6$

9. $\vec{a}=(3,4)$，$|\vec{a}|=5$，$\vec{b}\,/\!/\,\vec{a}$ 知$\vec{b}=t\vec{a}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot t\vec{a}=t|\vec{a}|^2=25t=-50$，知$t=-2$

即$\vec{b}=-2\vec{a}=(-6,-8)$

所求$|2\vec{a}+3\vec{b}|=|2(3,4)+3(-6,-8)|=|(-12,-16)|=\sqrt{144+256}=20$

10. $(2x-1)^5(x+1)=[\cdots\cdots+C^5_3(2x)^2(-1)^3+C^5_4(2x)(-1)^4+\cdots\cdots](x+1)$

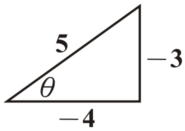
展式中，x^2之係數為$C^5_3(2)^2(-1)^3+C^5_4(2)(-1)^4=-40+10=-30$

11. 原式$\begin{cases}(a+1)x-3y=0\\ 3x+(1-a)y=0\end{cases}$(無常數項，至少一解$(0,0)$)

$\triangle=\begin{vmatrix}a+1 & -3\\ 3 & 1-a\end{vmatrix}=(a+1)(1-a)+9$

$\triangle=0$ 時，必$(a+1)(a-1)-9=0\Leftrightarrow a^2-1-9=0$，又$a>0$ 必$a=\sqrt{10}$

($\triangle=0$，方程組可能ϕ，可能無限多解，但本題不可能ϕ，故本題$\triangle=0$ 即無限多解)

12. $\theta\in$ Ⅲ，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，知 ，所求 $\dfrac{2\sin\theta-1}{3+4\cos\theta}=\dfrac{2(\frac{-3}{5})-1}{3+4(\frac{-4}{5})}=11$

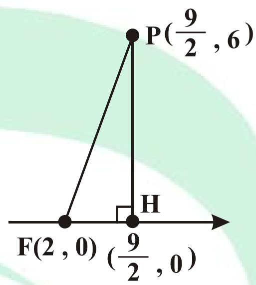
13. 平均數 $\mu=170$ 公分，標準差 $\sigma=4$ 公分

$\mu-\sigma=170-4=166$，166 公分以下即不到 $\mu-\sigma$ 約佔 $50\%-34\%=16\%$

若總人數 n 人，必 $\dfrac{120}{n}=16\%=\dfrac{16}{100}$，知 $n=750$(人)

14. 所求 $\dfrac{P_3^5}{5^3}=\dfrac{5\times4\times3}{5\times5\times5}=\dfrac{12}{25}$

15. $y^2=8x=4(2)x$，焦點 $F(2,0)$



拋物線 $y^2=8x$ 過 $P(x,6)$ 即 $6^2=8x$，知 $x=\dfrac{9}{2}$

所求△FPH之面積為 $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{FH}\cdot\overline{PH}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{5}{2})(6)=\dfrac{15}{2}$

16. $f(x)=(ax+b)^3$，$f'(x)=3(ax+b)^2\cdot a$

$f(2)=(2a+b)^3=1$，知 $2a+b=1$

$f'(2)=3a(2a+b)^2=6$ 知 $a=2$ 代回知 $b=-3$

$a-b=2-(-3)=5$

17. $a+bi=(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=\left[\dfrac{2(\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ))}{\sqrt{2}(\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ))}\right]^8=[\sqrt{2}(\cos15^\circ+i\sin15^\circ)]^8$

$=(2)^4(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)=16(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=-8+8\sqrt{3}i$，又 a、$b\in R$

必 $a^2+b^2=(-8)^2+(8\sqrt{3})^2=64+192=256$

《另解》注意到 $a^2+b^2=|a+bi|^2$(a、$b\in R$)

由複數絕對值之性質知

$|a+bi|=\left|(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i})\right|^8=\left|\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right|^8=(\dfrac{|\sqrt{3}-i|}{|1-i|})^8=(\dfrac{2}{\sqrt{2}})^8=16$

即 $\sqrt{a^2+b^2}=16\quad\Rightarrow a^2+b^2=16^2=256$

18. $\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=(1)(-\cos2\theta)=\dfrac{2}{3}$

$(2+3\cos2\theta=0\quad\Rightarrow\cos2\theta=\dfrac{-2}{3})$

19. 通分後，等式雙方分子恆等，即 $4x^2-6x-3=a(2x-3)^2+b(2x-3)+c$

下式即表 $4x^2-6x-3=4(x-\frac{3}{2})^2+6(x-\frac{3}{2})-3$

$$=1\cdot(2x-3)^2+3(2x-3)-3$$

$a+b+2c=1+3+2(-3)=-2$

$$\begin{array}{rrr|l} 4 & -6 & -3 & \frac{3}{2} \\ & +6 & +0 & \\ \hline 4 & +0 & \boxed{-3} & \\ & +6 & & \\ \hline 4 & \boxed{6} & & \end{array}$$

依第一行降階

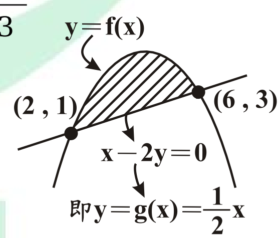
20. 所求 $\begin{vmatrix} x+2 & 13 & 16 \\ 11+0 & 14 & 17 \\ 12+0 & 15 & 18 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 13 & 16 \\ 0 & 14 & 17 \\ 0 & 15 & 18 \end{vmatrix}$

$$=3+2\begin{vmatrix} 14 & 17 \\ 15 & 18 \end{vmatrix}=3+2(-3)=-3$$

$\left(\text{令 } 14=a，\begin{vmatrix} 14 & 17 \\ 15 & 18 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a+3 \\ a+1 & a+4 \end{vmatrix}=a(a+4)-(a+1)(a+3)=-3\right)$

21. 陰影部份面積為 $\int_2^6 (f(x)-g(x))\,dx$

即 $\int_2^6 (f(x)-\frac{1}{2}x)\,dx=\frac{16}{3}$，即 $\int_2^6 f(x)dx-\frac{1}{2}\int_2^6 xdx=\frac{16}{3}$



即 $\int_2^6 f(x)dx=\frac{16}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_2^6=\frac{16}{3}+8=\frac{40}{3}$

所求 $\int_0^6 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx$

$$=\frac{-13}{3}+\frac{40}{3}=\frac{27}{3}=9$$

22. $\begin{cases} 10x-2y+5=0 \\ 6x-y+7=0 \end{cases}$ 知交點$(\frac{-9}{2}，-20)$

$2x+ay+b=0$，斜率為 2 $\Rightarrow \frac{-2}{a}=2$ 知 $a=-1$

即 $2x-y+b=0$ 過$(\frac{-9}{2}，-20)$，代入知 $2(\frac{-9}{2})-(-20)+b=0$

知 $b=-11$，$a+b=(-1)+(-11)=-12$

23. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(5x+3)}=\dfrac{x+1}{5x+3} & ，\ x\neq 1 \\ C & ，\ x=1 \end{cases}$

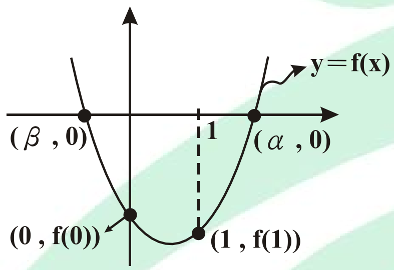
f 在 x＝1 處連續，必 $f(1)=C=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{5x+3}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

24. $L_1：3x+4y=3(-29)+4(23)$

$L_2：3x+4y=3(31)+4(23)$

$d(L_1, L_2)=\dfrac{|3(-29)+4(23)-3(31)-4(23)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{3\times 60}{5}=36$

25. 令$f(x)=9x^2+(12k+18)x+(4k^2+12k+5)$



由圖可知$f(x)=0$，二根α、β中$\alpha>1$，$\beta<0$

要求$f(0)<0$，$f(1)<0$即可

即要求$\begin{cases} f(0)=4k^2+12k+5=(2k+5)(2k+1)<0 \\ f(1)=9+12k+18+4k^2+12k+5=4k^2+24k+32 \\ \quad =4(k^2+6k+8)=4(k+2)(k+4)<0 \end{cases}$

即$\begin{cases} -\dfrac{5}{2}<k<-\dfrac{1}{2} \\ -4<k<-2 \end{cases}$　　即$\dfrac{-5}{2}<k<-2$

《另解》$9x^2+(12k+18)x+(4k^2+12k+5)=0$

$\Leftrightarrow 9x^2+(12k+18)x+(2k+1)(2k+5)=0$

(十字交乘$\begin{matrix} 3 & 2k+1 \\ 3 & 2k+5 \end{matrix}$)

$\Leftrightarrow (3x+2k+1)(3x+2k+5)=0$ 得兩實根$\dfrac{2k+1}{-3}$(大根)，$\dfrac{2k+5}{-3}$(小根)

必$\begin{cases} \dfrac{2k+1}{-3}>1 \\ \dfrac{2k+5}{-3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k<-2 \\ k>\dfrac{-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-5}{2}<k<-2$