102 學年度四技二專統一入學測驗
數學(B) 試題

1. 求正二十九邊形的對角線共有幾條？
   (A)337 (B)357 (C)377 (D)397。
2. 已知彩券共 2 千張，其中獎金金額分別為 3 萬元、1 萬 5 千元及 1 千元三種。若獎金 3 萬元的彩券有 2 張，1 萬 5 千元的彩券有 5 張，1 千元的彩券有 30 張，則 1 張彩券獎金的期望值為多少元？
   (A)82 (B)82.5 (C)83 (D)83.5。
3. 已知$a=\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}}$、$b=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{3}}$，則下列敘述何者為真？
   (A)$a\cdot b<2$ (B)$a+b<2$ (C)$a<b$ (D)$b^3<a^2$。
4. 已知$\sum\limits_{k=1}^{100}a_k=205$、$\sum\limits_{k=1}^{100}b_k=26$，求$\sum\limits_{k=1}^{100}(\dfrac{a_k}{5}-\dfrac{b_k}{2}+1)$之值。
   (A)29 (B)68 (C)80 (D)128。
5. 已知無窮等比級數$10+\dfrac{10}{1.001}+\dfrac{10}{1.001^2}+\cdots+\dfrac{10}{1.001^n}+\cdots$之和為 P，則 P 之值為何？
   (A)10000 (B)10010 (C)10100 (D)11000。
6. 新生盃歌唱比賽，決賽有三位，其名次由獲得「明日之星」獎章數多寡決定。而「明日之星」獎章則由 10 位評審依其評定頒予，每位評審只有一枚獎章，且規定獎章一定要頒出。請問三位參賽者獲得「明日之星」獎章的數目，有多少種不同的分配情形？
   (A)30 (B)66 (C)120 (D)3^{10}。
7. 若一組數值資料為 40、45、50、55、60、65、70、75，則下列何者為真？
   (A)中位數為 60 (B)第一四分位數Q_1為 45
   (C)第三四分位數Q_3為 65 (D)四分位差Q_3-Q_1為 20。
8. 已知方程組$\dfrac{x+y+1}{4}=\dfrac{2x-1}{5}=\dfrac{y+1}{2}$的解為$(a, b)$，求$a-b$之值。
   (A)-2 (B)-1 (C)0 (D)1。
9. 已知拋物線的焦點為$(2, -5)$，準線方程式為$y=-1$，求此拋物線的正焦弦長。
   (A)4 (B)8 (C)12 (D)16。

10. 若橢圓的兩焦點為$(-2,1)$、$(4,1)$且長軸長為 10，求其方程式。

(A)$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$　(B)$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

(C)$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$　(D)$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$。

11. 已知直角坐標平面兩點 $A(-4,-1)$、$B(-5,4)$，且 C 為線段$\overline{AB}$上的點。若 O 為原點，則下列何者可能為$\overleftrightarrow{OC}$的直線方程式？

(A)$y=-2x$　(B)$y=-x$　(C)$y=0.2x$　(D)$y=x$。

12. 已知直角坐標平面上有三點 $A(3,1)$、$B(5,-2)$、$C(-7,3)$，求點 A 到直線$\overleftrightarrow{BC}$的距離。

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4。

13. 已知平面上五個點 $A(\frac{1}{3},\frac{-1}{4})$、$B(\frac{51}{13},\frac{1}{4})$、$C(\frac{571}{13},\frac{69}{7})$、$D(\frac{-51}{16},\frac{69}{17})$、$E(\frac{-23}{4},\frac{-10}{3})$，若向量相加$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=(m,n)$，求 $m-n$ 之值。

(A)-3　(B)-1　(C)1　(D)3。

14. 已知平面上兩點 $A(\cos\frac{3\pi}{4},\sin\frac{3\pi}{4})$、$B(\cos\frac{\pi}{12},\sin\frac{\pi}{12})$，求線段$\overline{AB}$之長。

(A)1　(B)$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　(C)$\sqrt{2}$　(D)$\sqrt{3}$。

15. 受制於$\begin{cases} x\geqq 0 \\ y\geqq 0 \\ x+y\leqq 3 \\ 2x+y\leqq 4 \end{cases}$的條件下，求 $f(x,y)=x+3y$ 的最大值。

(A)0　(B)7　(C)9　(D)12。

16. 若x^2+x-2為多項式$x^3+ax^2+3x+b+1$的因式(其中a、b皆為實數)，則$a-b$之值為何？

(A)17　(B)3　(C)-4　(D)-15。

17. 求二次方程式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & x \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix}=0$的解集合。

(A)$\{1,2\}$　(B)$\{-1,2\}$　(C)$\{1,-2\}$　(D)$\{-1,-2\}$。

18. 若$\log_{10}2=x$、$\log_{10}3=y$，則$\log_{12}15$等於下列哪一式？

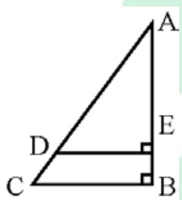
(A)$\frac{5}{4}$　(B)$\frac{x+y-1}{x+2y}$　(C)$\frac{x-y+1}{2x+y}$　(D)$\frac{y+1-x}{2x+y}$。

19. 已知ΔABC中，$\sin A：\sin B：\sin C＝5：7：8$，求$\cos A$之值。

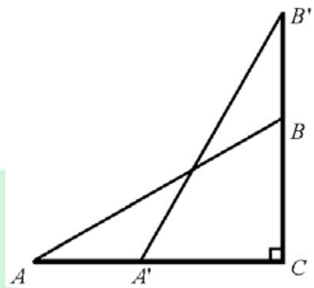
(A) $\frac{11}{14}$　　(B) $\frac{5}{7}$　　(C) $\frac{9}{14}$　　(D) $\frac{4}{7}$。

20. 已知ΔABC為直角三角形，$\angle B$為直角，點 D、E 分別在線段$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上。若$\overline{DE}$、$\overline{AB}$互相垂直，且$\overline{AD}＝\overline{AB}＝1$，$\overline{AB}\neq\overline{BC}$，如圖(一)，則下列敘述何者為真？

(A) $\overline{BC}＝\cot A$　　(B) $\overline{DE}＝\tan A$　　(C) $\overline{AE}＝\sin C$　　(D) $\overline{AC}＝\sec C$。



圖(一)



圖(二)

21. 已知x、y、z均為正實數。若x、y、z滿足$2x+3y+z=12$，則下列何者為真？

(A) xyz的最大值為 12　　(B) x^2y^3z的最大值為 32

(C) xyz^2的最大值為 48　　(D) xy^2z的最大值為 18。

22. 設$f(x)$、$g(x)$為x之多項式。若$g(x)$除以$2x-3$的餘式為 1，且$f(x)=g(x)(2x-3)+5$，則$(f(x))^2$除以$(2x-3)^2$的餘式為何？

(A) 5　　(B) $20x-5$　　(C) $10x-15$　　(D) 25。

23. 已知$\overline{AC}$垂直$\overline{B'C}$，點 A'、B 分別在$\overline{AC}$、$\overline{B'C}$上，$\overline{AB}＝\overline{A'B'}＝13$，如圖(二)。若$\angle B'A'C=2\angle BAC$，且$\Delta ABC$的面積為 39，則$\Delta A'B'C$的面積為何？

(A) 48　　(B) 42　　(C) 36　　(D) 30。

24. 已知多項式$f(x)=(x^2-x+1)^2-1$。求$\lim_{h\to 0}\frac{f(3h)-f(0)}{2h}$之值。

(A) -3　　(B) -2　　(C) 2　　(D) 3。

25. 設$f(x)=x^3-3x^2+2x+4$，則下列哪一個方程式為$f(x)$圖形的切線方程式？

(A) $x+y+5=0$　　(B) $x+y+3=0$　　(C) $x+y=5$　　(D) $x+y=8$。

102 學年度四技二專統一入學測驗
數學(B) 試題詳解

【解答】

1.(C)	2.(B)	3.(A)	4.(D)	5.(B)	6.(B)	7.(D)	8.(D)	9.(B)	10.(A)
11.(C)	12.(B)	13.(A)	14.(D)	15.(C)	16.(A)	17.(C)	18.(D)	19.(A)	20.(C)
21.(D)	22.(B)	23.(D)	24.(A)	25.(C)					

【詳解】

1. $C_2^{29}-29$(邊長)$=\dfrac{29\times 28}{2}-29=406-29=377$

2. $\dfrac{2}{2000}\times 30000+\dfrac{5}{2000}\times 15000+\dfrac{30}{2000}\times 1000=30+37.5+15=82.5$

3. $a=\dfrac{2}{2^{\frac{3}{4}}}=2^{\frac{1}{4}}$，$b=2^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{6}}$；(A)$a\cdot b=2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{5}{12}}<2^1$；

   (B)$a>1$，$b>1$，$a+b>2$；(C)$a>b$；(D)$b^3=a^2$。

4. 求值式$=\dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{100}a_k-\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{100}b_k+\sum_{k=1}^{100}1=\dfrac{1}{5}\times 205-\dfrac{1}{2}\times 26+100\times 1=128$

5. $p=\dfrac{a_1}{1-r}=\dfrac{10}{1-\dfrac{1}{1.001}}=\dfrac{10}{\dfrac{0.001}{1.001}}=\dfrac{10}{\dfrac{1}{1001}}=10010$

6. 設三位決賽人員 a、b、c→$a+b+c=10$

   $\rightarrow H_{10}^{3}=C_{10}^{3+10-1}=C_{10}^{12}=C_2^{12}=\dfrac{12\times 11}{1\times 2}=66$

7.

40	45	50	55	60	65	70	75
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8

   $Q_1=\dfrac{a_2+a_3}{2}=47.5$　$Q_3=\dfrac{a_6+a_7}{2}=67.5$

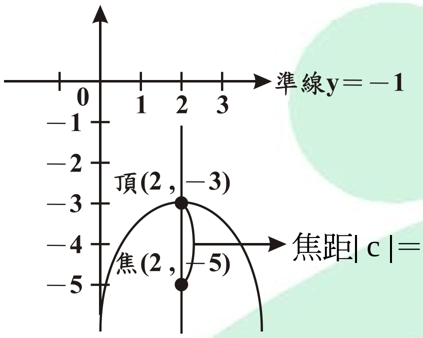
   中位數$Me=\dfrac{a_4+a_5}{2}=57.5$

   四分位差$=Q_3-Q_1=67.5-47.5=20$

8. $\begin{cases} \dfrac{x+y+1}{4}=\dfrac{2x-1}{5} & \rightarrow 5x+5y+5=8x-4 & \rightarrow 3x-5y=9\cdots(1) \\ \dfrac{2x-1}{5}=\dfrac{y+1}{2} & \rightarrow 4x-2=5y+5 & \rightarrow 4x-5y=7\cdots(2) \end{cases}$

由(1)、(2)→ $\begin{matrix} x=-2=a \\ y=-3=b \end{matrix}$，$a-b=1$

9.



焦距$|c|=2$ →正焦弦長 $4|c|=4\times2=8$

10. 兩焦點$(-2,1)(4,1)$ $\begin{cases} (1)中心(1,1) \\ (2)2c=4-(-2)=6 \rightarrow c=3 \\ (3)平躺型 \end{cases}$

又長軸長 $2a=10$ →$a=5$

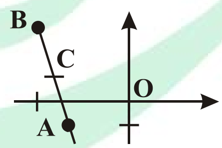
由$a^2=b^2+c^2$，得$b=4$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{5^2}+\dfrac{(y-1)^2}{4^2}=1$

11. $m_{\overline{OB}}=\dfrac{4-0}{-5-0}=-\dfrac{4}{5}$，$m_{\overline{OA}}=\dfrac{-1-0}{-4-0}=\dfrac{1}{4}$

∵C 在$\overline{AB}$上，則 $m_{\overline{OB}}<m_{\overline{OC}}<m_{\overline{OA}}$ (依右圖)

(A)$m=-2$；(B)$m=-1$；(C)$m=0.2$；(D)$m=1$



12. $\overleftrightarrow{BC}$：$(y+2)=\dfrac{3-(-2)}{-7-5}(x-5)$ →$y+2=\dfrac{5}{-12}(x-5)$ →$-12y-24=5x-25$

→$5x+12y-1=0$

A 至$\overleftrightarrow{BC}$之距離$=\dfrac{|5\times3+12\times1-1|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{26}{13}=2$

13. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}=$E 點－A 點$=(\dfrac{-23}{4},\dfrac{-10}{3})-(\dfrac{1}{3},\dfrac{-1}{4})$

$=(\dfrac{-23}{4}-\dfrac{1}{3},\dfrac{-10}{3}-(-\dfrac{1}{4}))=(m,n)$

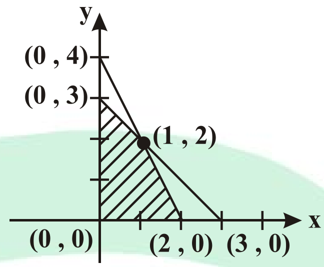
$m-n=(\dfrac{-23}{4}-\dfrac{1}{3})-(\dfrac{-10}{3}+\dfrac{1}{4})=-\dfrac{24}{4}+\dfrac{9}{3}=-6+3=-3$

14. $\overline{AB}=\sqrt{(\cos\dfrac{3}{4}\pi-\cos\dfrac{\pi}{12})^2+(\sin\dfrac{3}{4}\pi-\sin\dfrac{\pi}{12})^2}$

$$=\sqrt{\cos^2\frac{3}{4}\pi+\sin^2\frac{3}{4}\pi+\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}-2(\cos\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\pi}{12})}=\sqrt{1+1-2\cos(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{12})}$$

$$=\sqrt{2-2\cos\frac{2}{3}\pi}=\sqrt{2-2(-\cos\frac{\pi}{3})}=\sqrt{2-2(-\frac{1}{2})}=\sqrt{3}$$

15. $\left.\begin{array}{l}x+y=3\\2x+y=4\end{array}\right\}$ 交點(1 , 2)、且 $\begin{array}{c|c|c}x&3&0\\\hline y&0&3\end{array}$ $\begin{array}{c|c|c}x&2&0\\\hline y&0&4\end{array}$



目標函數 $f(x , y)=x+3y$

$$\begin{cases}f(0 , 0)=0\\f(2 , 0)=2\\f(1 , 2)=7\\f(0 , 3)=9\to \text{Max}\end{cases}$$

16. $x^2+x-2=(x+2)(x-1)\ \to\begin{cases}x+2\text{為因式}x=-2\\x-1\text{為因式}x=1\end{cases}$

代入 $x^3+ax^2+3x+b+1\ \to\begin{cases}-8+4a-6+b+1=0\\1+a+3+b+1=0\end{cases}\to\begin{cases}a=6\\b=-11\end{cases}\to a-b=17$

17. $\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&-6&x\\1&x&4\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-4&x+3\\0&x-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&x+3\\x-2&1\end{vmatrix}$

$=-4-(x-2)(x+3)=-x^2-x+2=-(x^2+x-2)=-(x+2)(x-1)=0$

$x=-2 , 1$

18. $\log_{12}15=\dfrac{\log_{10}15}{\log_{10}12}=\dfrac{\log_{10}3\times5}{\log_{10}4\times3}=\dfrac{\log_{10}3+\log_{10}5}{\log_{10}4+\log_{10}3}=\dfrac{\log_{10}3+\log_{10}\frac{10}{2}}{\log_{10}2^2+\log_{10}3}$

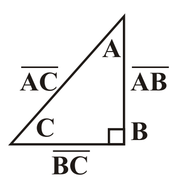
$=\dfrac{\log_{10}3+\log_{10}10-\log_{10}2}{2\log_{10}2+\log_{10}3}=\dfrac{y+1-x}{2x+y}$

19. 依正弦定理

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=5:7:8\ \begin{cases}a=5k\\b=7k\\c=8k\end{cases}$

依餘弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(7k)^2+(8k)^2-(5k)^2}{2(7k)(8k)}=\dfrac{7^2+8^2-5^2}{2\times7\times8}$

$=\dfrac{88}{112}=\dfrac{11}{14}$

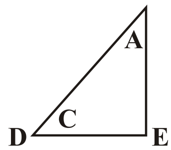


20. (A) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\tan A \quad \rightarrow \overline{BC}=1\times\tan A=\tan A\rightarrow$錯

(D) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\sin C \quad \rightarrow \overline{AC}=\dfrac{1}{\sin C}=\csc C\rightarrow$錯

(B) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\sin A \quad \rightarrow \overline{DE}=1\times\sin A=\sin A\rightarrow$錯

(C) $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\sin C \quad \rightarrow \overline{AE}=1\times\sin C=\sin C$



21. (A) $\dfrac{2x+3y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{(2x)(3y)z} \quad \rightarrow \dfrac{12}{3}\geqq\sqrt[3]{6xyz}\xrightarrow{\text{三次方}}6xyz\leqq 64$

$\rightarrow xyz\leqq\dfrac{32}{3}\rightarrow$錯

(B) $\dfrac{x+x+y+y+y+z}{6}\geqq\sqrt[6]{x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot z} \quad \rightarrow \dfrac{12}{6}\geqq\sqrt[6]{x^2y^3z}$

$\xrightarrow{\text{六次方}}x^2y^3z\leqq 64\rightarrow$錯

(C) $\dfrac{2x+3y+\frac{z}{2}+\frac{z}{2}}{4}\geqq\sqrt[4]{(2x)(3y)(\frac{z}{2})(\frac{z}{2})} \quad \rightarrow \dfrac{12}{4}\geqq\sqrt[4]{\frac{3}{2}xyz^2}$

$\xrightarrow{\text{四次方}}\dfrac{3}{2}xyz^2\leqq 81 \quad \rightarrow xyz^2\leqq 54\rightarrow$錯

(D) $\dfrac{2x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}y+z}{4}\geqq\sqrt[4]{(2x)(\frac{3}{2}y)(\frac{3}{2}y)z} \quad \rightarrow \dfrac{12}{4}\geqq\sqrt[4]{\frac{9}{2}xy^2z}$

$\xrightarrow{\text{四次方}}\dfrac{9}{2}xy^2z\leqq 81 \quad \rightarrow x^2yz\leqq 18$

22. $g(x)=(2x-3)Q(x)+1$

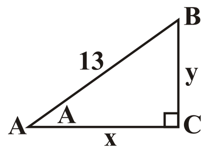
$[f(x)]^2=[g(x)(2x-3)+5]^2=[g(x)]^2(2x-3)^2+2g(x)(2x-3)\cdot 5+5^2$

$=[g(x)]^2(2x-3)^2+2[(2x-3)Q(x)+1](2x-3)\cdot 5+25$

$=[g(x)]^2(2x-3)^2+10(2x-3)^2Q(x)+10(2x-3)+25\rightarrow \div(2x-3)^2$

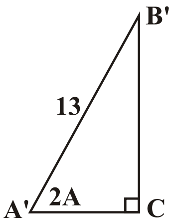
餘式為 $10(2x-3)+25=20x-5$

23. $\triangle ABC$ 面積 39 $\rightarrow \dfrac{xy}{2}=39 \rightarrow xy=78$



$\sin A=\dfrac{y}{13}$，$\cos A=\dfrac{x}{13}$

$\rightarrow \sin 2A=2\sin A\cos A=2\times\dfrac{y}{13}\times\dfrac{x}{13}=\dfrac{2\times 78}{169}=\dfrac{12}{13}$



↓

$\sin 2A=\dfrac{12}{13}$ 又 $\overline{A'B'}=13 \rightarrow \begin{cases}\overline{B'C}=12\\ \overline{A'C}=5\end{cases} \rightarrow \triangle A'B'C'$面積$=\dfrac{12\times 5}{2}=30$

24. $f(x)=(x^2-x+1)^2-1 \rightarrow f'(x)=2(x^2-x+1)\cdot(2x-1)$

$\rightarrow f'(0)=2\times 1\times(-1)=-2$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3h)-f(0)}{2h}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{3h\to 0}\dfrac{f(0+3h)-f(0)}{3h}=\dfrac{3}{2}f'(0)=\dfrac{3}{2}\times(-2)=-3$

25. $f(x)=x^3-3x^2+2x+4$，$f'(x)=3x^2-6x+2$ →四選項的斜率皆為-1

$f'(a)$表$x=a$之切線斜率 $\rightarrow 3x^2-6x+2=-1 \rightarrow 3x^2-6x+3=0$

$\rightarrow 3(x-1)^2=0 \rightarrow x=1$

又$f(1)=1-3+2+4=4$ →切點$(1, 4)$

∴在$x=1$ 之切線為$(y-4)=-(x-1) \rightarrow x+y=5$