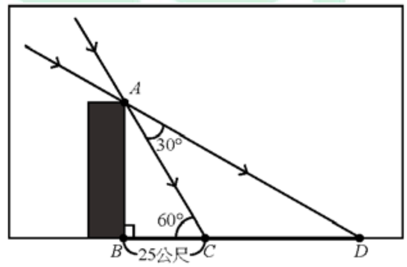
102 學年度四技二專統一入學測驗
數學(A) 試題

1. 設 a＝$\sqrt[3]{9}$ 、b＝$\sqrt{3\sqrt{3}}$ 、c＝$\sqrt[5]{81}$ ，比較 a、b、c 之大小關係為何？
(A)a＜b＜c (B)c＜b＜a (C)b＜c＜a (D)a＜c＜b。
2. 設△ABC 是邊長為 9 的正三角形，求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 兩向量的內積？
(A)$-\dfrac{81}{2}$ (B)$\dfrac{81}{2}$ (C)45 (D)81。
3. 若一直角三角形 ABC 中，∠C 為直角，且 $\tan A=\dfrac{5}{12}$ 、$\overline{BC}=10$，則此三角形之周長為何？
(A)30 (B)40 (C)50 (D)60。
4. 設 P_m^n 表示從 n 個不同的事物中，任選 m 個排成一列的排列方法，若 $P_3^{2n}=20\times P_2^n$ ，求自然數 n＝？
(A)2 (B)3 (C)4 (D)5。
5. 有 2000 人參加的慢跑競賽中，小雲排名第 85 名，試求其百分等級？
(A)96 (B)95 (C)5 (D)4。
6. 設一個次數不小於 3 之多項式 f(x)，以 x＋2 除之餘－6，以 x－3 除之餘 9。若以(x＋2)(x－3)除 f(x)所得餘式為 r(x)，則 r(1)之值為何？
(A)－6 (B)0 (C)3 (D)9。
7. 若 θ 為一銳角，且 $\alpha=\sin\dfrac{\theta}{3}$ 、$b=\cos(\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{2})$、$c=\tan\dfrac{\theta}{3}$ ，則下列何者正確？
(A)b＜c＜a (B)a＜b＜c (C)c＜b＜a (D)b＜a＜c。
8. 設 A(－2 , 1)、B(1 , 3)、C(1 , －1)為△ABC 的三個頂點。若直線 L 經過 A 點，且 L 等分△ABC 的面積，則直線 L 的方程式為何？
(A)y＝1 (B)y＝2 (C)x＋2y＝1 (D)x－2y＝3。
9. 有一棟大樓在下午 2 時太陽照射的影子(如圖(一)之線段 $\overline{BC}$)長為 25 公尺，此時從大樓的影子端(即 C 點)，測得大樓頂端的光線與地平面所成之夾角(∠BCA)為 60°。若已知在下午 2 時與 4 時，太陽從大樓頂端射出的光線夾角(∠CAD)為 30°。則在下午 4 時，此大樓的影子(如圖(一)之線段 $\overline{BD}$)長為多少公尺？
(A)50
(B)$25(1+\sqrt{3})$
(C)75
(D)$50\sqrt{3}$ 。



圖(一)

10. 下列何者為不等式 $\log_{\frac{2}{3}}(2x-8)>1+\log_{\frac{2}{3}}(x+6)$ 的解？

(A)3　(B)6　(C)9　(D)12。

11. 在坐標平面上，求二元一次聯立不等式 $\begin{cases}|x-2y|\leqq 2\\|x+2y|\leqq 2\end{cases}$ 的解所成的區域面積。

(A)2　(B)4　(C)6　(D)8。

12. 設 $\cot\alpha$ 和 $\cot\beta$ 為方程式 $2x^2-3x-6=0$ 的兩根，則 $\cot^2\alpha+\cot^2\beta=$？

(A) $-\frac{33}{4}$　(B) $-\frac{15}{4}$　(C) $\frac{15}{4}$　(D) $\frac{33}{4}$。

13. 某汽車公司擁有甲、乙兩家工廠，生產 A、B 兩種不同型的汽車，若甲廠每天可完成 10 台 A 型的汽車與 20 台 B 型的汽車，乙廠每天可完成 30 台 A 型的汽車與 10 台 B 型的汽車。如果公司要製造 150 台 A 型汽車與 100 台 B 型汽車，則兩工廠各工作幾天，才能使兩工廠所花費的工作天數之和最少？

(A)甲廠 0 天，乙廠 10 天　(B)甲廠 1 天，乙廠 6 天
(C)甲廠 15 天，乙廠 0 天　(D)甲廠 3 天，乙廠 4 天。

14. 設 a 和 b 均為實數，若不等式 $ax^2+bx-5<0$ 的解為 $\frac{-3}{2}<x<\frac{5}{3}$，則 $a+b=$？

(A) $\frac{5}{3}$　(B) $\frac{7}{3}$　(C)5　(D)7。

15. 若氣象局最初發佈某一颱風之暴風圈其外緣以圓方程式表示：$x^2+y^2+4x-6y-3=0$，因受大氣環流影響，經過數小時後颱風中心(即圓心)坐標 (h, k) 向西和向北各移動一單位(即新圓心坐標為 $(h-1, k+1)$)，且暴風半徑增為原來的 1.5 倍，問新暴風圈外緣之圓方程式為何？

(A) $x^2+y^2+6x-8y+1=0$　(B) $x^2+y^2+6x-8y-11=0$
(C) $x^2+y^2+2x-4y-19=0$　(D) $x^2+y^2+2x-4y-31=0$。

16. 設點 P 在圓 O：$x^2+y^2=1$ 上移動，P 點與直線 L：$3x+4y+4=0$ 最長距離為 M，最短距離為 m，則 $M-m=$？

(A)0　(B)1.6　(C)1.8　(D)2。

17. 公司尾牙舉辦抽獎活動，共有 125 張獎券，其中 500 元的獎金 100 張，1000 元的獎金 20 張，10000 元的獎金 4 張，20000 元的獎金 1 張，求抽獎者抽一張獎券，可獲得獎金的期望值為多少元？

(A)520　(B)1000　(C)1040　(D)2000。

18. 某考生期末考各科成績分別為 60、75、80、95、80、78，下列敘述何者有誤？

(A)眾數為 80　(B)全距為 35
(C)中位數為 79　(D)算數平均數為 79。

19. 求 $\log_2\left(\frac{\cos 30^\circ-\tan 45^\circ}{\tan 60^\circ-2\cot 45^\circ}\right)=$？

(A) -1　(B)0　(C)1　(D)2。

20. 若x^2+x+2為x^4-3ax^2+bx+4之因式，則a、b的值為何？

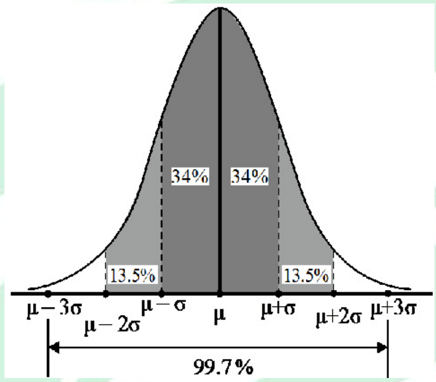
(A)$a=\frac{1}{3}$，$b=-4$ (B)$a=\frac{1}{3}$，$b=-2$ (C)$a=-1$，$b=0$ (D)$a=1$，$b=0$。

21. 求級數 $7+8-9+10+11-12+\ldots\ldots$到第 99 項的和，其中級數每一項的絕對值成等差數列且 3 的倍數項為負數。

(A)1778 (B)1782 (C)1888 (D)1906。

22. 假設某品牌的餅乾包裝上標示著內容量為 50 公克±2.5 公克，且該產品每包重量的分配為常態分配，如圖(二)，而 50 與 2.5 分別為其算術平均數(μ)與標準差(σ)。若此品牌餅乾每包重量為 x 公克，則 x 落在下列哪一區間的機率最小？

(A)$x\leqq 45$ (B)$45\leqq x\leqq 47.5$ (C)$52.5\leqq x\leqq 55$ (D)$x\geqq 57.5$。



圖(二)

23. 若一元二次實係數方程式$x^2+2kx-k+6=0$的兩根均為負數，則k可能為下列哪一個值？

(A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{3}{2}$ (C)$\frac{11}{2}$ (D)$\frac{13}{2}$。

24. 設甲、乙兩班比賽棒球，規則是以先取得四勝者為勝方，且每場比賽皆有勝負。若現已賽畢三場，甲班以二勝一負取得優勢，則往後有幾種可能賽事序列來決定勝方？

(A)8 (B)9 (C)10 (D)11。

25. 若從 7 個正數、5 個負數中，任取 2 個數相乘，且相乘結果是正數的機率為 p，則關於 p 的敘述下列何者正確？

(A)$0<p<\frac{1}{4}$ (B)$\frac{1}{4}<p<\frac{1}{2}$ (C)$\frac{1}{2}<p<\frac{3}{4}$ (D)$\frac{3}{4}<p<1$。

102 學年度四技二專統一入學測驗
數學 (A)　試題詳解

【解答】

1.(A)	2.(A)	3.(D)	4.(B)	5.(B)	6.(C)	7.(D)	8.(A)	9.(C)	10.(B)
11.(B)	12.(D)	13.(D)	14.(A)	15.(B)	16.(C)	17.(C)	18.(D)	19.(A)	20.(C)
21.(B)	22.(D)	23.(C)	24.(C)	25.(B)					

【詳解】

1. $a=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{40}{60}}$

   $b=(3\cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{45}{60}}$

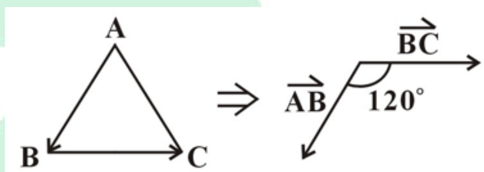
   $c=\sqrt[5]{3^4}=3^{\frac{4}{5}}=3^{\frac{48}{60}}$

   $\therefore c>b>a$

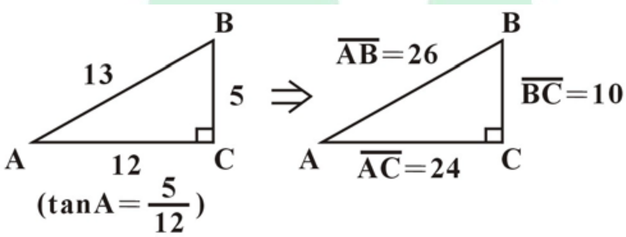
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos 120^\circ$

   $=9\cdot 9\cdot(-\frac{1}{2})$

   $=-\frac{81}{2}$



3.



   $\Rightarrow$ △周長$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=60$

4. $P^{2n}_{3}=20\cdot P^{n}_{2}$

   $\Rightarrow 2n(2n-1)(2n-2)=20\cdot n\cdot(n-1)$

   $\Rightarrow 2n-1=5$

   $\Rightarrow n=3$

5. $PR=\frac{2000-85}{2000}\times 100=95.75$(小數無條件去掉)　$\Rightarrow PR=95$

6. 令 $f(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+(ax+b)$

$(1)f(-2)=-6 \quad \Rightarrow -2a+b=-6$

$(2)f(3)=9 \quad \Rightarrow 3a+b=9$

由$(2)-(1) \quad \Rightarrow a=3$，$b=0$

$\Rightarrow r(x)=3x \quad \Rightarrow r(1)=3$

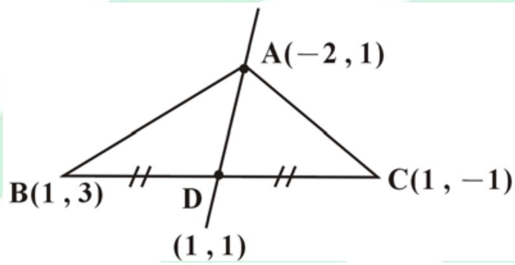
7. θ為銳角$\Rightarrow \dfrac{\theta}{3}$為銳角

$a=\sin\dfrac{\theta}{3}>0 \qquad b=\cos(\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{2})=-\sin\dfrac{\theta}{3}<0 \qquad c=\tan\dfrac{\theta}{3}>0$

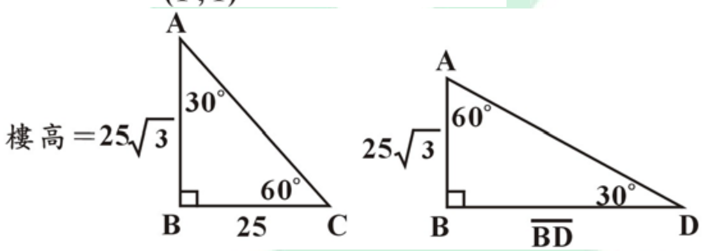
由$\begin{cases} \begin{array}{lcc} & 0^\circ & 45^\circ \\ \sin & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan & 0 & 1 \end{array} \end{cases} \Rightarrow \tan\dfrac{\theta}{3}>\sin\dfrac{\theta}{3}$

故：$c>a>b$

8. 直線 L 過 A、D $\quad \Rightarrow y=1$



9.



$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{25\sqrt{3}}{\overline{BD}} \qquad \Rightarrow \overline{BD}=75$

10. 真數>0

(1)$2x-8>0 \quad \Rightarrow x>4$

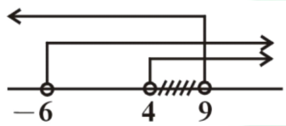
(2)$x+6>0 \quad \Rightarrow x>-6$

原式：

(3)$\log_{\frac{2}{3}}(2x-8)>1+\log_{\frac{2}{3}}(x+6) \quad \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}}(2x-8)>\log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}(x+6)$

$\xrightarrow{0<\frac{2}{3}<1} 2x-8<\frac{2}{3}(x+6) \quad \Rightarrow x-4<\frac{x+6}{3} \Rightarrow 3x-12<x+6 \quad \Rightarrow x<9$

由(1)∩(2)∩(3)

$\Rightarrow$ 

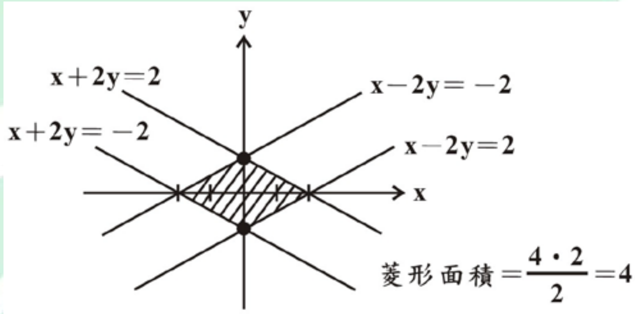
$\Rightarrow 4<x<9$，故選(B)

11. (1)$|x-2y|\leqq 2$

$\Rightarrow -2\leqq x-2y\leqq 2$

(2)$|x+2y|\leqq 2$

$\Rightarrow -2\leqq x+2y\leqq 2$



12. $2x^2-3x-6=0 \quad \Rightarrow x^2-\frac{3}{2}x-3=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \cot\alpha+\cot\beta=\frac{3}{2} \\ \cot\alpha\cdot\cot\beta=-3 \end{cases}$

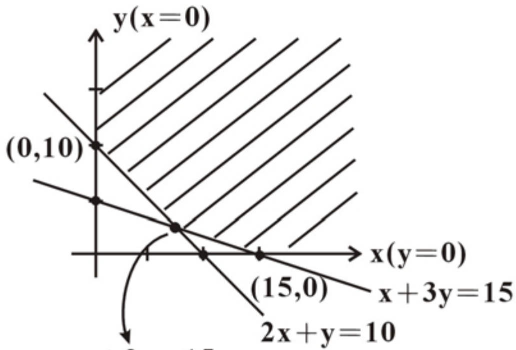
$\cot^2\alpha+\cot^2\beta=(\cot\alpha+\cot\beta)^2-2\cot\alpha-\cot\beta$

$=(\frac{3}{2})^2-2(-3)=\frac{9}{4}+6=\frac{33}{4}$

ALeader

13. 令甲廠工作 x 天，乙廠工作 y 天

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ 10x+30y \geqq 150 \\ 20x+10y \geqq 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ x+3y \geqq 15 \\ 2x+y \geqq 10 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x+3y=15 \\ 6x+3y=30 \end{cases} \Rightarrow (3,4)$$

$f(x , y)=x+y$
$f(15 ,0)=15$
$f(0 , 10)=10$
$f(3 , 4)=7$……最少

14. $-\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{5}{3} \quad \Rightarrow (2x+3)(3x-5)<0 \quad \Rightarrow 6x^2-x-15<0$

$\Rightarrow 2x^2-\dfrac{1}{3}x-5<0 \quad \Rightarrow a=2$，$b=-\dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow a+b=\dfrac{5}{3}$

15. 原：$x^2+y^2+4x-6y-3=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{圓心}(-2\text{，}3) \\ r=\dfrac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2-4(-3)}=4 \end{cases}$

新：$\begin{cases} \text{圓心}(-2-1\text{，}3+1)=(-3\text{，}4) \\ r_1=1.5r=1.5\times 4=6 \end{cases}$

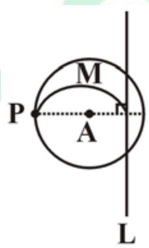
利用標準式：新的圓方程式 $\Rightarrow (x+3)^2+(y-4)^2=6^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+6x-8y-11=0$

16. $x^2+y^2=1 \begin{cases} \text{圓心}A(0 , 0) \\ r=1 \end{cases}$

$d(A , L)=\dfrac{|3\cdot 0+4\cdot 0+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{4}{5}$

$\because d<r \quad \Rightarrow$ 相割 $\quad \Rightarrow$



$M=r+d=\dfrac{9}{5}$

$m=0$

故 $M-m=\dfrac{9}{5}=1.8$

17. 獲得獎金的期望值$=\dfrac{1}{125}\times 20000+\dfrac{4}{125}\times 10000+\dfrac{20}{125}\times 1000+\dfrac{100}{125}\times 500$

$=1040$(元)

18. 小到大：60、75、78、80、80、95

眾數＝80

全距＝最大－最小＝35

中位數＝$\dfrac{78+80}{2}=79$

算術平均數＝$\dfrac{60+75+78+80+80+95}{6}=78$

19. 原式$=\log_2\left(\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}{\sqrt{3}-2\cdot 1}\right)=\log_2\left(\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}}{\sqrt{3}-2}\right)=\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$

20.

$$
\begin{array}{r}
x^2-x+(-3a-1) \\
x^2+x+2\,\overline{\big)\,x^4+0x^3-3ax^2+bx+4} \\
-)\ \underline{x^4+x^3+2x^2\qquad\qquad} \\
-x^3+(-3a-2)x^2+bx \\
-)\ \underline{-x^3-\quad x^2\quad -2x} \\
(-3a-1)x^2+(b+2)x+4 \\
-)\ \underline{(-3a-1)x^2+(-3a-1)x+(-6a-2)} \\
(3a+b+3)x+(6a+6)
\end{array}
$$

$\because$因式 $\Rightarrow$餘＝0

$\Rightarrow\begin{cases}3a+b+3=0\\6a+6=0\end{cases}$

$\Rightarrow a=-1$，$b=0$

21. 原式$=7+8-9+10+11-12+\cdots\cdots+103+104-105$(共 99 項)

$=\underbrace{(7+8+9+\cdots\cdots+105)}_{99\text{ 項}}-2\underbrace{(9+12+\cdots+105)}_{33\text{ 項}}$

$=\dfrac{99(7+105)}{2}-2\cdot\dfrac{33(9+105)}{2}$

$=99\times56-33\times114$

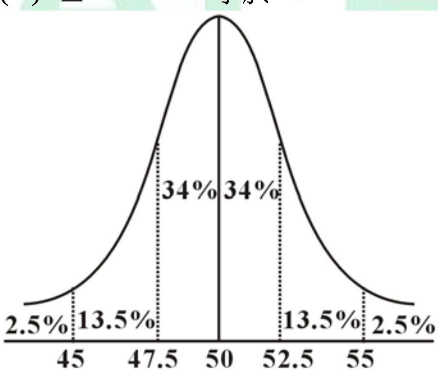
$=5544-3762$

$=1782$

22. (A)$x\leqq45$ $\Rightarrow$佔 2.5%

(B)$45\leqq x\leqq47.5$ }佔13.5%
(C)$52.5\leqq x\leqq55$ }

(D)$x\geqq57.5$ $\Rightarrow$小於 2.5%



23. $x^2+2kx-k+6=0$

令二根為 α 、 β ($\alpha<0$ 且 $\beta<0$)

(1) $\alpha+\beta=-2k\cdots\cdots-2k<0 \quad \Rightarrow k>0$

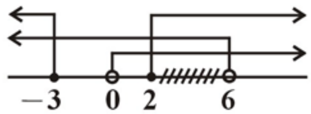
(2) $\alpha\beta=-k+6\cdots\cdots-k+6>0 \quad \Rightarrow k<6$

(3) $b^2-4ac\geqq 0$

$\Rightarrow (2k)^2-4\cdot 1(-k+6)\geqq 0 \quad \Rightarrow 4k^2+4k-24\geqq 0 \quad \Rightarrow k^2+k-6\geqq 0$

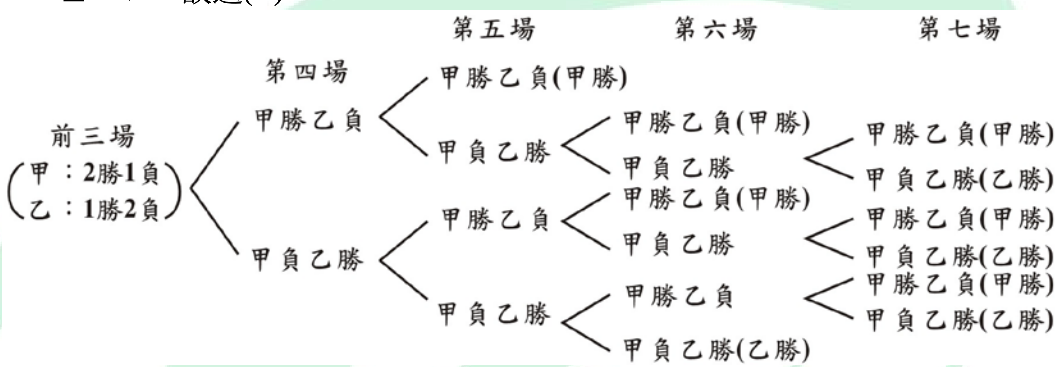
$\Rightarrow (k+3)(k-2)\geqq 0 \quad \Rightarrow k\geqq 2$ or $k\leqq -3$

由(1)∩(2)∩(3)

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow 2\leqq k<6$，故選(C)

24.



∴共有 10 種情形。

25. 樣本空間 $\Rightarrow C^{12}_2=66$

欲求情形 $\Rightarrow$ 2 正 or 2 負

$=C^7_2+C^5_2$

$=31$

$P=\dfrac{31}{66} \quad \Rightarrow \dfrac{1}{4}<P<\dfrac{1}{2}$

(約 0.47)

ALeader