101 學年度四技二專統一入學測驗
數學(C) 試題

1. 下列何者為不等式 $3x^2-3x\leqq 6$ 之解？
   (A)$x\leqq -2$ 或 $x\geqq 1$　(B)$-2\leqq x\leqq 1$　(C)$-1\leqq x\leqq 2$　(D)$x\leqq -1$ 或 $x\geqq 2$。
2. 在 $x\geqq 0$，$y\geqq 1$，$x+y\leqq 2$ 的條件下，$2x-y$ 的最大值為何？
   (A)-2　(B)-1　(C)1　(D)2。
3. 設拋物線 $x^2-2x-4y+1=0$ 之頂點為 V 且與直線 L：$y=1$ 相交於 A、B 二點，則ΔABV 之面積為何？
   (A)1　(B)2　(C)4　(D)8。
4. 若函數 $f(x)$的導函數為 $f'(x)=x^2-6x$，則 $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$ 之值為何？
   (A)0　(B)1　(C)6　(D)不存在。
5. 下列何者與 $\log 1+\log 2+\log 3+\log 4+\log 5-\log 6$ 的值最為接近？(已知 $\log 2$ 的值約為 0.301，而 $\log 3$ 的值約為 0.4771)
   (A)0.1　(B)1.5　(C)5.3　(D)6.2。
6. 設直線 L：$kx+3y+10=0$ 與圓 C：$x^2+y^2=4$ 沒有交點，則常數 k 的範圍為何？
   (A)$-4<k<4$　(B)$-2<k<2$
   (C)$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$　(D)$k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}$。
7. 設拋物線 $y=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 處之切線方程式為 $y-2=4(x-1)$，則 $3a-2b$ 之值為何？
   (A)5　(B)6　(C)7　(D)8。
8. 在 xy 平面上，P 和 Q 為拋物線 $y=x^2$ 上的兩點，若 P 和 Q 的 x 坐標分別是-1 和 2，則 P 和 Q 的距離為何？
   (A)1　(B)2　(C)4　(D)$3\sqrt{2}$。
9. 設向量 $\vec{u}=(a,2)$，$\vec{v}=(3,2a)$，$\vec{w}=(-1,2)$，則下列敘述何者正確？
   (A)若 $2\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{w}$ 平行，則 $a=-3$　(B)若$(2\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=0$，則 $a=-\dfrac{5}{2}$
   (C)若$|2\vec{u}+\vec{v}|=5$，則 $a=-\dfrac{1}{2}$　(D)若$|2\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{w}|$，則 $a=0$。
10. 已知 a 和 c 為實數，若複數 $a+2i$ 為一元二次方程式 $x^2+2x+c=0$ 的一根，則 c 之值為何？
    (A)-4　(B)-2　(C)3　(D)5。
11. 若兩數列 $2, 2a, 18$ 及 $a+4, 2, a+7$ 都是等比數列，則下列何者正確？
    (A)$-6<a<-4$　(B)$-4<a<-2$　(C)$2<a<4$　(D)$4<a<6$。

12. 若 x^2+x+1 為 x^3+ax^2+bx+2 的因式，則下列何者正確？
(A)$a>b$ (B)$a^2+b^2=10$ (C)$a-b=-2$ (D)$a+b=6$。

13. 設 $x-1$ 和 $x+1$ 為多項式 $x^5+ax^4+bx^3+5x^2+2x-5$ 的因式，則 $3a+b$ 之值為何？
(A)-3 (B)1 (C)3 (D)6。

14. 試問下列哪一個三角函數值與 $\sec 250^\circ$ 相等？
(A)$-\csc 70^\circ$ (B)$-\sec 110^\circ$ (C)$-\sec 340^\circ$ (D)$-\csc 160^\circ$。

15. 設 $P(-2,4)$ 與 $Q(2,-2)$，若直線 $L：ax+3y+b=0$ 為 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線，求 $a+b$ 之值為何？
(A)$-\dfrac{15}{2}$ (B)-5 (C)-1 (D)$\dfrac{3}{2}$。

16. 平面上四點 $A(1,1)$、$B(a,2)$、$C(b,-1)$、$D(0,-2)$，其中 b 為正數，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 互相平行，且 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直，求 $a+2b$ 之值為何？
(A)7 (B)8 (C)9 (D)10。

17. 由甲、乙、丙、丁、戊、已、庚、辛八個人中選取 5 人組成一個委員會，且甲、乙、丙、丁四人中至少有 2 人為委員，則組成此委員會的方法數共有幾種？
(A)48 (B)50 (C)52 (D)54。

18. 連續投擲一粒公正骰子三次，則三次點數和為 5 的機率為何？
(A)$\dfrac{1}{54}$ (B)$\dfrac{5}{216}$ (C)$\dfrac{1}{36}$ (D)$\dfrac{7}{216}$。

19. 若函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2+6x$ 且 $f(1)=3$，則 $\int_0^2 f(x)dx$ 之值為何？
(A)10 (B)12 (C)14 (D)20。

20. 已知 $y=2^x$ 的圖形通過圓 $C：x^2+y^2-2ay=0$ 之圓心。若圓 C 與直線 $L：y=\dfrac{3x+k}{4}$ 相切，求 $\log_2 a+\log_5(k-4)^2$ 之值為何？
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4。

21. $\sin^2 210^\circ+\cos^2 570^\circ+\sec^2 930^\circ-\tan^2 1290^\circ+\csc^2 1650^\circ-\cot^2 2010^\circ=$？
(A)-1 (B)1 (C)$\dfrac{3}{2}$ (D)3。

22. $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BC}=\sqrt{13}$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60^\circ$，則 $\cos C$ 之值為何？
(A)$-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ (B)$-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ (C)$\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ (D)$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$。

23. 已知 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，則下列大小關係何者正確？
(A)$\cos\theta<\sin 2\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$ (B)$\sin 2\theta<\cos 2\theta<\cos\theta<\sin\theta$
(C)$\sin 2\theta<\cos\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$ (D)$\cos\theta<\cos 2\theta<\sin 2\theta<\sin\theta$。

24. 設兩直線 L_1：$3x+y-4=0$ 與 L_2：$x+3y-4=0$，則 L_1 與 L_2 交角為銳角的角平分線方程式為何？

(A)$x+y-2=0$　(B)$x-y=0$　(C)$2x+y-3=0$　(D)$2x-y=0$。

25. 將 0、0、2、2、9、9、9、9 八個數字全取，排成一列，可得幾個不同的八位數？

(A)155　(B)210　(C)315　(D)420。

【解答】

1.(C)　2.(C)　3.(B)　4.(A)　5.(B)　6.(A)　7.(B)　8.(D)　9.(B)　10.(D)

11.(B)　12.(D)　13.(A)　14.(D)　15.(B)　16.(D)　17.(C)　18.(C)　19.(A)　20.(B)

21.(D)　22.(C)　23.(C)　24.(A)　25.(C)

101 學年度四技二專統一入學測驗
數學(C) 試題詳解

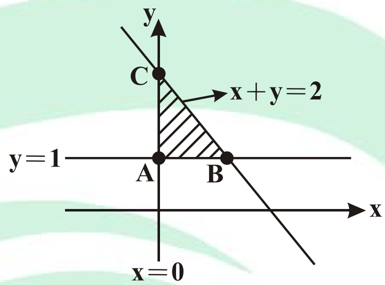
1.(C)	2.(C)	3.(B)	4.(A)	5.(B)	6.(A)	7.(B)	8.(D)	9.(B)	10.(D)
11.(B)	12.(D)	13.(A)	14.(D)	15.(B)	16.(D)	17.(C)	18.(C)	19.(A)	20.(B)
21.(D)	22.(C)	23.(C)	24.(A)	25.(C)					

1. 原式即 $3x^2-3x-6\leqq 0 \Leftrightarrow x^2-x-2\leqq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)\leqq 0$，知 $-1\leqq x\leqq 2$

2.

	A	B	C
(x , y)	(0 , 1)	(1 , 1)	(0 , 2)
2x－y	－1	1	－2

max



3. $x^2-2x-4y+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=4y$ 之頂點 V(1 , 0)

$\begin{cases}(x-1)^2=4y\\ y=1\end{cases}$ 可解得交點 A、B 為(3 , 1)(－1 , 1)

$\triangle$ABV 之面積為 $\frac{1}{2}(4)(1)=2$

4. 所求 $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(0)=x^2-6x\big|_{x=6}=(6)^2-6(6)=0$

5. $\log 1+\log 2+\log 3+\log 4+\log 5-\log 6$

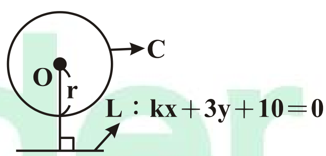
$=\log\frac{5!}{6}=\log_{10}20=1+\log 2\fallingdotseq 1+0.301=1.301$

最接近之選項為(B)

6. C：$x^2+y^2=2^2$，圓心 O(0 , 0)，半徑 r＝2

L 與 C 無交點 $\Leftrightarrow d(O , L)>r \Leftrightarrow \frac{|k(0)+3(0)+10|}{\sqrt{k^2+3^2}}>2$

$\Leftrightarrow 5>\sqrt{k^2+9} \Leftrightarrow k^2+9<25 \Leftrightarrow (k+4)(k-4)<0 \Leftrightarrow -4<k<4$



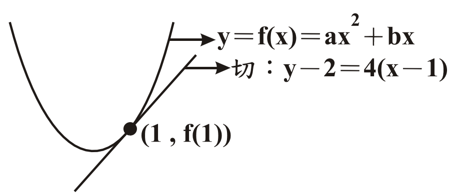
7. 切點(1 , f(1))在切線上

$f(1)-2=4(1-1) \quad \Rightarrow f(1)=a+b=2\cdots\cdots(1)$

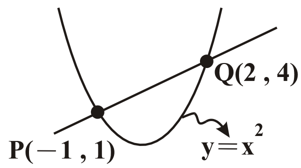
$m_{切}=f'(1)=2a+b=4\cdots\cdots(2)$

由(1)(2)可得 a＝2，b＝0

所求 3a－2b＝6



8. $\overline{PQ}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$



9. $\vec{u}=(a\,,2)$，$\vec{v}=(3\,,2a)$，$\vec{w}=(-1\,,2)$

$2\vec{u}+\vec{v}=(2a\,,4)+(3\,,2a)=(2a+3\,,2a+4)$

若令 $2a+3=b$(方便計算)可得 $2\vec{u}+\vec{v}=(b\,,b+1)$

(A)$2\vec{u}+\vec{v}\,/\!/\,\vec{w}\Leftrightarrow\dfrac{b}{-1}=\dfrac{b+1}{2}$ 知 $b=\dfrac{-1}{3}=2a+3\quad\Rightarrow a=\dfrac{-5}{3}$

(B)$(2\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=0\Leftrightarrow(b\,,b+1)\cdot(-1\,,2)=-b+2b+2=0$

知 $b=-2=2a+3\quad\Rightarrow a=\dfrac{-5}{2}$

(C)$|2\vec{u}+\vec{v}|=|(b\,,b+1)|=\sqrt{b^2+(b+1)^2}=5\Leftrightarrow b^2+b^2+2b+1=25$

$\Leftrightarrow(b+4)(b-3)=0$，若 $b=-4=2a+3\quad\Rightarrow a=\dfrac{-7}{2}$

若 $b=3=2a+3\quad\Rightarrow a=0$

(D)$|2\vec{u}+\vec{v}|=|(b\,,b+1)|=\sqrt{b^2+(b+1)^2}=|\vec{w}|\Leftrightarrow b^2+b^2+2b+1=5$

$\Leftrightarrow(b+2)(b-1)=0$，若 $b=-2=2a+3\quad\Rightarrow a=\dfrac{-5}{2}$

若 $b=1=2a+3\quad\Rightarrow a=-1$

10. a、$c\in R$，$x^2+2x+c=0$ 由實係數方程式虛根成對定理知

$a+2i$ 為一根必另一根為 $a-2i$

$$\begin{cases}\text{二根和} a+2i+a-2i=-2 & \text{知} a=-1\\ \text{二根積}(-1+2i)(-1-2i)=c & \text{知} c=5\end{cases}$$

11. $2\,,2a\,,18$ 成等比$(2a)^2=2\times18$，知 $a=\pm3$…………(1)

$a+4\,,2\,,a+7$ 成等比$(2)^2=(a+4)(a+7)$，即 $a^2+11a+24=0$

即$(a+3)(a+8)=0$ 知 $a=-3$ or -8……………(2)

由(1)(2)可知 $a=-3$ 滿足 $-4<a<-2$

12. x^2+x+1 為 x^3+ax^2+bx+2 之因式，必$\begin{cases}b-a=0\\3-a=0\end{cases}$，即$\begin{matrix}a=3\\b=3\end{matrix}$

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +a & +b & +2 & -1\\
 & -1 & +(1-a) & & -1\\
 & & -1 & +(1-a) & \\ \hline
1 & +(a-1) & +(b-a) & +(3-a) &
\end{array}$$

13. 令 $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+5x^2+2x-5$

$x-1|f(x)\Leftrightarrow f(1)=1+a+b+5+2-5=0\Leftrightarrow a+b=-3\cdots\cdots(1)$

$x+1|f(x)\Leftrightarrow f(-1)=-1+a-b+5-2-5=0\Leftrightarrow a-b=3\cdots\cdots(2)$

由(1)(2)知 $a=0$，$b=-3$，$3a+b=-3$

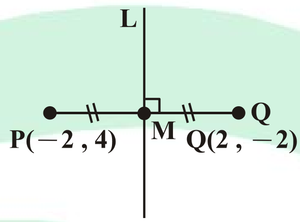
14. $\sec250^\circ=\sec(180^\circ+70^\circ)=-\sec70^\circ$

(A) $-\csc70^\circ$；(B) $-\sec110^\circ=-\sec(180^\circ-70^\circ)=\sec70^\circ$；

(C) $-\sec340^\circ=-\sec(360^\circ-20^\circ)=-\sec20^\circ$；

(D) $-\csc160^\circ=-\csc(90^\circ+70^\circ)=-\sec70^\circ$

15. $\overline{PQ}$之中點 $M(\frac{-2+2}{2}, \frac{4-2}{2})=(0, 1)$



$m_{\overleftrightarrow{PQ}}=\frac{6}{-4}=\frac{-3}{2}$ 知 $L=\frac{2}{3}$

$L：y-1=\frac{2}{3}(x-0)$即 $-2x+3y-3=0$

$a+b=(-2)+(-3)=-5$

16. $A(1, 1)$，$B(a, 2)$，$C(b, -1)$，$D(0, -2)$

$\overrightarrow{AB}=(a-1, 1)$，$\overrightarrow{CD}=(-b, -1)$

由 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ 知 $\frac{a-1}{-b}=\frac{1}{-1}$ 即 $a-1=b\cdots\cdots\cdots(1)$

$\overrightarrow{BD}=(-a, -4)$，$\overrightarrow{AC}=(b-1, -2)$

由 $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$ 知 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

即 $-a(b-1)+8=0\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)中 $a=b+1$ 代入(2)可得 $(b+1)(b-1)-8=0$

即 $b=3$ or -3(不合 $b>0$)

代(1)知 $a=4$，所求 $a+2b=4+2(3)=10$

17.

A 區 2 人，B 區 3 人→$C^4_2\times C^4_3=6\times4=24$

A 區 3 人，B 區 2 人→$C^4_3\times C^4_2=4\times6=24$

A 區 4 人，B 區 1 人→$C^4_4\times C^4_1=4=4$，計 52

《另解》8 人任取 5 人，扣除甲乙丙丁中只取 1 人即可

$=C^8_5-C^4_1\times C^4_4=56-4=52$

18. $(1,1,3)\to\frac{3!}{2!}=3$，$(1,2,2)\to\frac{3!}{2!}=3$，所求 $\frac{3+3}{6^3}=\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$

《另解》$x+y+z=5$ 求非負整數解

即 $H^3_{5-3}=H^3_2=C^{3+2-1}_2=C^4_2=6$

所求 $\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$

19. $f'(x)=3x^2+6x\to f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+6x)\,dx=x^3+3x^2+c$

但 $f(1)=1+3+c=3$ 即 $c=-1$ 知 $f(x)=x^3+3x^2-1$

所求 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3+3x^2-1)\,dx=(\frac{1}{4}x^4+x^3-x)\Big|_0^2=\frac{1}{4}(16)+8-2=10$

20. $C：x^2+(y-a)^2=a^2$，圓心 $O(0,a)$在 $y=2^x$ 上

知 $a=2^0=1=$半徑 r，$L：3x-4y+k=0$

相切$\Leftrightarrow d(0,L)=r\Leftrightarrow\frac{|3(0)-4(1)+k|}{5}=1\Leftrightarrow|k-4|=5$

所求 $\log_2 a+\log_5(k-4)^2=\log_2 1+\log_5 5^2=0+2=2$

21. $\sin^2 210^\circ+\cos^2 570^\circ+\sec^2 930^\circ-\tan^2 1290^\circ+\csc^2 1650^\circ-\cot^2 2010^\circ$

$570^\circ=360^\circ+210^\circ$，$930^\circ=720^\circ+210^\circ$

$1290^\circ=1080^\circ+210^\circ$，$1650^\circ=1440^\circ+210^\circ$，$2010^\circ=1800^\circ+210^\circ$

若令 $210^\circ=\theta$，原式即$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)$

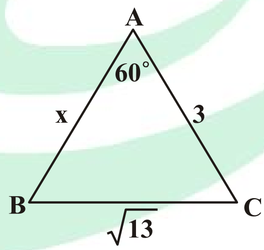
$=(1)+(1)+(1)=3$

22. 由餘弦定理知(令$\overline{AB}=x$)

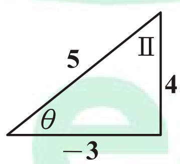
$\sqrt{13}^2=x^2+3^2-2\cdot x\cdot 3\cdot\cos 60^\circ$

即 $x^2-3x-4=0$ 知$\overline{AB}=x=4$

又 $\cos C=\frac{3^2+\sqrt{13}^2-4^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$



23. $\theta\in$ II



$\cos\theta=\frac{-3}{5}=\frac{-15}{25}$

$\sin\theta=\frac{4}{5}=\frac{20}{25}$

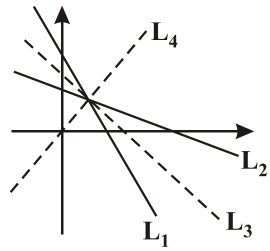
$\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2(\frac{4}{5})(\frac{-3}{5})=\frac{-24}{25}$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{-3}{5})^2-1=\frac{-7}{25}$

$\because\frac{-24}{25}<\frac{-15}{25}<\frac{-7}{25}<\frac{20}{25}$

知 $\sin 2\theta<\cos\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$

24. L_1：$3x+y-4=0$，$L_2=x+3y-4=0$



L_1 與 L_2 之角平分線：$\dfrac{|3x+y-4|}{\sqrt{10}}=\dfrac{|x+3y-4|}{\sqrt{10}}$

即 $3x+y-4=\pm(x+3y-4)$

即 $x+y-2=0$ 與 $x-y=0$

所求為 L_3(斜率為負)

L_3 為 $x+y-2=0$

25. 0 , 0 , 2 , 2 , 9 , 9 , 9 , 9 全取排八位數

2 排首 $\dfrac{7!}{2\,!4!}=105$

9 排首 $\dfrac{7!}{2!2!3!}=210$，計 315

《另解》任排－(0 排首)

$$\frac{8!}{2!2!4!}-\frac{7!}{2!4!}=\frac{8!-2!7!}{2!2!4!}=\frac{(8-2)7!}{2!2!4!}=\frac{6\times7\times6\times5}{4}$$

$=9\times7\times5=315$