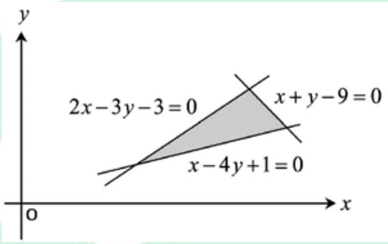
100 學年度四技二專統一入學測驗
數學(C) 試題

1. 若$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[5]{64}}=4^{a}$，則a＝？

(A)$\dfrac{19}{20}$　(B)$\dfrac{29}{30}$　(C)$\dfrac{19}{10}$　(D)$\dfrac{29}{15}$。

2. 下列二元一次聯立不等式中，何者代表圖(一)所示之三角區域？

(A)$\begin{cases}x-4y+1\leqq 0\\2x-3y-3\geqq 0\\x+y-9\leqq 0\end{cases}$　(B)$\begin{cases}x-4y+1\leqq 0\\2x-3y-3\leqq 0\\x+y-9\leqq 0\end{cases}$　(C)$\begin{cases}x-4y+1\geqq 0\\2x-3y-3\geqq 0\\x+y-9\geqq 0\end{cases}$　(D)$\begin{cases}x-4y+1\geqq 0\\2x-3y-3\leqq 0\\x+y-9\leqq 0\end{cases}$。



圖(一)

3. 已知兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$互相垂直。若$|\vec{a}|=4\sqrt{5}$，$|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{5}$，則$|\vec{b}|=$？

(A)$\sqrt{5}$　(B)$2\sqrt{5}$　(C)$3\sqrt{5}$　(D)$4\sqrt{5}$。

4. 已知一橢圓方程式為$\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$。若點P(x , y)為此橢圓上任一點，則$\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=$？

(A)5　(B)6　(C)8　(D)10。

5. 若無窮等比級數$(0.4)+(0.4)^2+(0.4)^3+\cdots+(0.4)^n+\cdots$的和為a，無窮等比級數$(0.2)+(0.2)^2+(0.2)^3+\cdots+(0.2)^n+\cdots$的和為b，則$\dfrac{a}{b}=$？

(A)$\dfrac{4}{3}$　(B)2　(C)$\dfrac{8}{3}$　(D)4。

6. 已知一圓方程式為$x^2+y^2+6x-8y=0$。下列敘述何者正確？

(A)點(1 , 0)落在圓外　(B)此圓通過點(−3 , 4)
(C)此圓的半徑為 25　(D)此圓的圓心為(0 , 0)。

7. 若$f(x)=(x-1)^5$，且$f'(x)$為f(x)的一階導函數，則$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=$？

(A)0　(B)1　(C)5　(D)20。

8. 已知$0\leqq\alpha$，$\beta\leqq\pi$。下列各選項中，何者恆為正確？

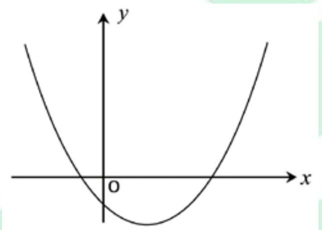
(A)若$\cos\alpha=\cos\beta$，則$\alpha=\beta$　(B)若$\cos(\alpha-\beta)=0$，則$\alpha=\beta$
(C)若$\sin\alpha=\sin\beta$，則$\alpha=\beta$　(D)若$\sin(\alpha-\beta)=0$，則$\alpha=\beta$。

9. 某遊樂場舉辦摸彩活動，摸彩箱中有 0 號球、1 號球、2 號球各 3 個，每一球被取出之機率均相同。遊客由摸彩箱中同時取出 3 球，若取出的 3 個球為 1 個 1 號球、2 個 0 號球時，則此遊客可以免費入場。求一遊客經由此摸彩活動得以免費入場的機率為何？

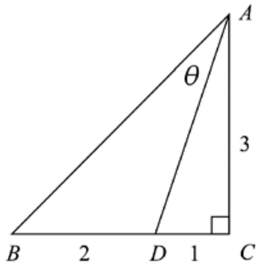
(A)$\frac{3}{560}$　(B)$\frac{3}{28}$　(C)$\frac{2}{9}$　(D)$\frac{1}{3}$。

10. 設a , b , c為實數，且二次函數$y=ax^2+bx+c$的圖形如圖(二)所示，則點$P(b^2-4ac , abc)$在第幾象限？

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限。



圖(二)



圖(三)

11. 已知f(x)為一實係數多項式，且$f(\frac{3}{2})=27$，$f(\frac{-5}{3})=8$，若f(x)除以 $6x^2+x-15$ 的餘式為$ax+b$，則$a+b=$？

(A)4　(B)6　(C)18　(D)24。

12. 設直線L_1的斜率為－2 且通過點(0 , －4)，又直線L_2的x、y軸截距分別為 1、2，則下列敘述何者正確？

(A)L_1與L_2相兩交於點(2 , －8)　(B)L_1與L_2相交於點(4 , －6)

(C)L_1與L_2平行且兩線相距$\frac{2}{\sqrt{5}}$　(D)L_1與L_2平行且兩線相距$\frac{6}{\sqrt{5}}$。

13. 已知△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，D 在$\overline{BC}$線段上，且線段長$\overline{BD}=2$，$\overline{DC}=1$，$\overline{AC}=3$，如圖(三)所示。令$\angle BAD=\theta$，求$\cos\theta=$？

(A)$\frac{1}{\sqrt{10}}$　(B)$\frac{1}{\sqrt{5}}$　(C)$\frac{2}{\sqrt{10}}$　(D)$\frac{2}{\sqrt{5}}$。

14. 判斷下列各數值中，何者小於 0？

(參考公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$)

(A)$\cos100^\circ-\sin2011^\circ$　(B)$\cos^2100^\circ-\sin^2100^\circ$

(C)$\cos^22011^\circ-\sin^22011^\circ$　(D)$\cos100^\circ\cos2011^\circ-\sin100^\circ\sin2011^\circ$。

15. 若直線 $24x-7y=53$ 與二直線 $x=0$、$x=7$ 分別交於 A、B 二點，則線段$\overline{AB}$的長度為何？

(A)$\frac{24}{7}$　(B)$\frac{53}{7}$　(C)25　(D)53。

16. 設 A(-13，-19)，B(x , y)為平面上相異兩點。若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\bar{u}=(5,12)$ 同方向且 $|\overrightarrow{AB}|=26$，則 $3x-4y=$？

(A)-103　(B)-29　(C)29　(D)103。

17. 若 α ，β 為方程式 $x-\dfrac{3}{x}=-1$ 的兩相異實根，則 $\left(\dfrac{2}{\alpha}+1\right)\left(\dfrac{2}{\beta}+1\right)=$？

(A)-1　(B)$\dfrac{1}{3}$　(C)1　(D)$\dfrac{5}{3}$。

18. 設拋物線的對稱軸平行 x 軸，且過(8，-3)，(8 , 1)，(2，-2)三點，則此拋物線之頂點坐標為何？

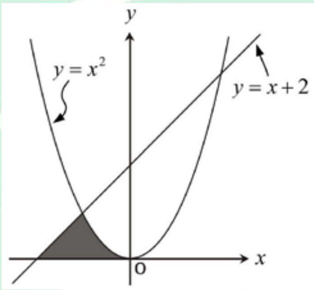
(A)(-1 , 0)　(B)(-1 , 1)　(C)(0，-1)　(D)(1，-1)。

19. 設 $f(x)=\sqrt{2x-1}$ ，且 $f''(x)$ 為 $f(x)$ 的二階導函數，則 $\int_1^5 f''(x)dx=$？

(A)$\dfrac{-2}{3}$　(B)$\dfrac{-1}{3}$　(C)$\dfrac{1}{3}$　(D)$\dfrac{2}{3}$。

20. 求圖(四)陰影部份之面積為何？

(A)$\dfrac{2}{3}$　(B)$\dfrac{5}{6}$　(C)1　(D)$\dfrac{4}{3}$。



圖(四)

21. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人排成一列。若甲、乙、丙、丁四人必排在此列的最前面四位，且甲、乙不相鄰，則此七人共有多少種排法？

(A)36　(B)72　(C)144　(D)840。

22. 已知 $i=\sqrt{-1}$ 。若 $z=\cos78^\circ+i\sin78^\circ$，則 $z^{15}=$？

(A)$-i$　(B)-1　(C)i　(D)1。

23. 設a、b為實數，若一元二次不等式 $ax^2+x+b>0$ 的解集合為 $\left\{x \middle| \dfrac{-1}{5}<x<\dfrac{2}{3}, x\text{為實數}\right\}$，則 $2a+b=$？

(A)-5　(B)-4　(C)4　(D)5。

24. 求 $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{3}{2}-\log_2\dfrac{27}{160\sqrt{2}}+\log_4\dfrac{36}{25}=$？

(A)$\dfrac{5}{2}$　(B)$\dfrac{7}{2}$　(C)$\dfrac{9}{2}$　(D)$\dfrac{11}{2}$。

25. 設三位數的百位數字為 a、十位數字為 b、個位數字為 c。若 a、c 為偶數，b 為奇數，且 $a>b>c$，則滿足這些條件的三位數共有多少個？

(A)5　(B)10　(C)15　(D)20。

100 學年度四技二專統一入學測驗
數學 (C) 試題詳解

【解答】

1.(A)	2.(A)	3.(C)	4.(D)	5.(C)	6.(A)	7.(D)	8.(A)	9.(B)	10.(A)
11.(D)	12.(D)	13.(D)	14.(B)	15.(C)	16.(B)	17.(B)	18.(C)	19.(A)	20.(B)
21.(B)	22.(C)	23.(B)	24.(C)	25.(D)					

【詳解】

1. 原式即 $2^{\frac{1}{2}}\cdot(2^3\cdot2^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{3}}=(2^2)^a$，即 $2^{\frac{1}{2}+(3+\frac{6}{5})\cdot\frac{1}{3}}=2^{2a}$
   即 $\frac{19}{10}=2a$，所求 $a=\frac{19}{20}$
2. 注意到 L_1：$x-4y+1=0$，L_2：$2x-3y-3=0$，L_3：$x+y-9=0$，
   三直線x係數均正
   判斷左右方即可，所求區域在 L_1 之左，L_2 之右，L_3 之左，又直線非虛線
   所求即 $\begin{cases}x-4y+1\leqq 0\\2x-3y-3\geqq 0\\x+y-9\leqq 0\end{cases}$
3. $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(5\sqrt{5})^2\Leftrightarrow|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=125\Leftrightarrow|4\sqrt{5}|^2+|\vec{b}|^2+0=125$
   即 $|\vec{b}|^2=45$，$|\vec{b}|^2=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$
4. $\frac{(x+1)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2}=1$，中心 $(-1,1)$，$a=5$，$b=3$，$c=4$(左右型)
   兩焦點 $F_1(3,1)$，$F_2(-5,1)$
   所求 $\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\overline{PF_2}+\overline{PF_1}=2a=10$
5. $a=\frac{0.4}{1-0.4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$b=\frac{0.2}{1-0.2}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，$\frac{a}{b}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$
6. $x^2+y^2+6x-8y=0\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$，圓心 $O(-3,4)$，半徑 $r=5$
   令 $A(1,0)$，$\overline{AO}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}>5=r$，知 $A(1,0)$ 在圓外
7. $\lim\limits_{x\to2}\frac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=f''(2)=20(x-1)^3\Big|_{x=2}=20$
   $(f(x)=(x-1)^5$，$f'(x)=5(x-1)^4$，$f''(x)=20(x-1)^3)$

8. (A)$0\leqq x\leqq \pi$，$y=\cos x$ 為嚴格減函數，故知 $\cos\alpha=\cos\beta$ 必 $\alpha=\beta$；

(B)$0\leqq \alpha$，$\beta\leqq \pi$，$\cos(\alpha-\beta)=0$ 必 $\alpha-\beta=\pm\dfrac{\pi}{2}$；

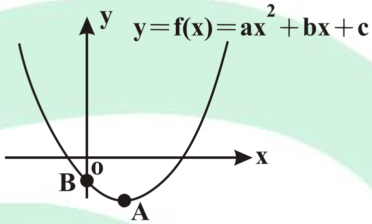
(C)$0\leqq \alpha$，$\beta\leqq \pi$，$\sin\alpha=\sin\beta$ 必 $\alpha+\beta=\pi$，即 $\alpha=\pi-\beta$；

(D)$0\leqq \alpha$，$\beta\leqq \pi$，$\sin(\alpha-\beta)=0$ 必 $\alpha-\beta=-\pi$、0、π。

9. 要求 3 個 1 號球取得 1 個且 3 個 0 號球取得 2 個

即 $\dfrac{C_1^3\times C_2^3}{C_3^9}=\dfrac{3\times 3}{9\times 8\times 7\times\dfrac{1}{3!}}=\dfrac{3}{28}$

10. 開口向上 $\Leftrightarrow a>0$



頂點 $A\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)\in$ Ⅳ

$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{-b}{2a}>0\\ \dfrac{-(b^2-4ac)}{4a}<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b<0\\ b^2-4ac>0\end{cases}$

又 $B(0, f(0))=(0, c)$ 在 x 軸下方 $c<0$

所求點 $P(b^2-4ac, abc)=(+, (+)(-)(-))=(+, +)\in$ I

11. 可設 $f(x)=(6x^2+x-15)Q(x)+ax+b$

即 $f(x)=(3x+5)(2x-3)Q(x)+ax+b$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}a+b=27$

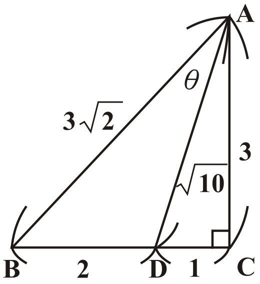
$f\left(\dfrac{-5}{3}\right)=\dfrac{-5}{3}a+b=8$，可求得 $a=6$，$b=18$，所求 $a+b=24$

12. L_1 即 $y+4=(-2)(x-0)$，即 $2x+y+4=0$

L_2 即 $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}=1$，即 $2x+y-2=0$

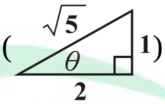
知 L_1 與 L_2 平行(無交點)且距離為 $\dfrac{|4-(-2)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

13. $\triangle$ABD中，$\cos\theta = \dfrac{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-2^2}{2\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$



《另解》令$\angle$BAC$=\theta_1$，$\angle$DAC$=\theta_2$

$$\tan\theta=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+(1)(\frac{1}{3})}=\frac{1}{2}$$

又 $0^\circ<\theta<90^\circ$ $\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ （）

14. $2011^\circ=360^\circ\times5+211^\circ$，知 2011°與 211°為同界角

(A)$\cos100^\circ-\sin2011^\circ=\cos(90^\circ+10^\circ)-\sin(180^\circ+31^\circ)=-\sin10^\circ+\sin31^\circ>0$

　($0^\circ<x<90^\circ$，sinx為增函數)

(B)$\cos^2100^\circ-\sin^2100^\circ=\cos2\times100^\circ=\cos200^\circ<0$($\theta\in$ Ⅲ，$\cos\theta<0$)

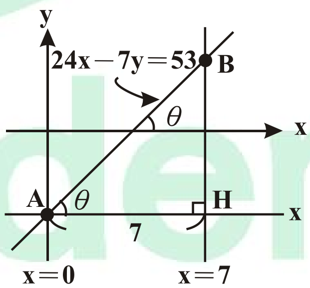
(C)$\cos^22011^\circ-\sin^22011^\circ=\cos^2211^\circ-\sin^2211^\circ=\cos2\times211^\circ=\cos422^\circ=\cos62^\circ>0$

(D)即求$\cos211^\circ\cos100^\circ-\sin211^\circ\sin100^\circ=\cos(211^\circ+100^\circ)=\cos311^\circ>0$

　($\theta\in$ Ⅳ，$\cos\theta>0$)

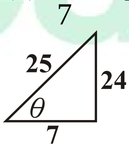
15. A：$\begin{cases}24x-7y=53\\x=0\end{cases}$ 知 A$(0,\ \dfrac{-53}{7})$，B：$\begin{cases}24x-7y=53\\x=7\end{cases}$，知 B$(7,\ 24-\dfrac{53}{7})$

$\overline{AB}=\sqrt{7^2+(24-\frac{53}{7}+\frac{53}{7})^2}=\sqrt{7^2+24^2}=25$



《另解》直線斜角θ，斜率 $m=\tan\theta=\dfrac{24}{7}$

所求 $\overline{AB}=\overline{AH}\times\sec\theta=7\times\dfrac{25}{7}=25$



16. $\overrightarrow{AB}=(x+13,\ y+19)$，與 $\bar{u}=(5,\ 12)$同向且長度為 26(即 $\bar{u}$ 長度之 2 倍)之向量為 $2\bar{u}$

即$(x+13,\ y+19)=2(5,\ 12)=(10,\ 24)$，即 $x=-3$，$y=5$，$3x-4y=-29$

17. $x-\dfrac{3}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2-3=-x \Leftrightarrow x^2+x-3=0$

二根和$\alpha+\beta=-1$，二根積$\alpha\cdot\beta=-3$

所求$(\dfrac{2}{\alpha}+1)(\dfrac{2}{\beta}+1)=(\dfrac{\alpha+2}{\alpha})(\dfrac{\beta+2}{\beta})=\dfrac{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(-3)+2(-1)+4}{-3}=\frac{1}{3}$$

18. 拋物線之對稱軸平行x軸$\Leftrightarrow$左右型$\Leftrightarrow x=ay^2+by+c$

代入$(8,-3) \quad \Rightarrow 8=9a-3b+c$

$(8,1) \quad \Rightarrow 8=a+b+c$

$(2,-2) \quad \Rightarrow 2=4a-2b+c$，知$a=2$，$b=4$，$c=2$

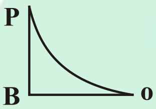
此拋物線$x=2y^2+4y+2 \quad \Rightarrow x=2(y+1)^2$即$(y+1)^2=4\cdot\dfrac{1}{8}(x-0)$，頂點$(0,-1)$

19. $\displaystyle\int_1^5 f''(x)dx=f'(x)\Big|_1^5=f'(5)-f'(1)=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3}$

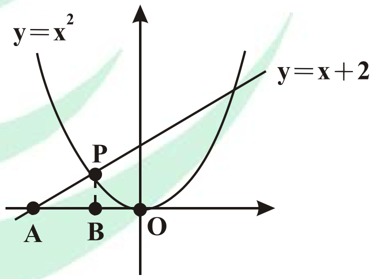
$(f(x)=\sqrt{2x-1}$，$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}})$

20. $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases} \quad \Rightarrow x^2-x-2=0 \quad \Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \quad \Rightarrow x=2$ or -1

知$P(-1,1)$，$B(-1,0)$，$A(-2,0)$

所求△ABP與 

$\displaystyle\int_{-2}^{-1}(x+2)dx+\int_{-1}^{0}x^2dx$



$=(\dfrac{1}{2}x^2+2x)\Big|_{-2}^{-1}+\dfrac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}$

$=[(\dfrac{1}{2}-2)-(2-4)]+[(0)-(\dfrac{-1}{3})]=\dfrac{5}{6}$

21. 甲乙丙丁(甲乙不相鄰)排前四位方法為 $2!\times P_2^3=12$(丙丁先排，再插排甲、乙)

戊已庚排後三位方法 $3!=6$，所求 $12\times 6=72$

22. $z=\cos 78^\circ+i\sin 78^\circ$，

由棣美弗定理知，$z^{15}=\cos(78^\circ\times 15)+i\sin(78^\circ\times 15)=\cos 1170^\circ+i\sin 1170^\circ$

但 $1170^\circ=360^\circ\times 3+90^\circ$，故知$z^{15}=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=0+i(1)=i$

23. $\dfrac{-1}{5}<x<\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow (5x+1)(3x-2)<0 \Leftrightarrow 15x^2-7x-2<0 \Leftrightarrow \dfrac{-15}{7}x^2+x+\dfrac{2}{7}>0$

知$a=\dfrac{-15}{7}$，$b=\dfrac{2}{7}$，$2a+b=\dfrac{-30+2}{7}=-4$

24. 原式即$\log_{(\sqrt{2})^2}(\frac{3}{2})^2-\log_2\frac{27}{160\sqrt{2}}+\log_{\sqrt{4}}\sqrt{\frac{36}{25}}=\log_2\frac{\frac{9}{4}\times\frac{6}{5}}{\frac{27}{160\sqrt{2}}}$

$=\log_2(\frac{9}{4}\times\frac{6}{5}\times\frac{160\sqrt{2}}{27})=\log_2(16\sqrt{2})=\log_2(2^4\cdot 2^{\frac{1}{2}})=\frac{9}{2}$

25. 奇數有 1 , 3 , 5 , 7 , 9 偶數有 0 , 2 , 4 , 6 , 8

百位數字 a，十位數字 b，個位數字 c，a＞b＞c

b＝1 時 a 之選法 C_1^4，c 之選法 C_1^1，此種三位數有 $C_1^4\cdot C_1^1=4$ 個

b＝3 時 a 之選法 C_1^3，c 之選法 C_1^2，此種三位數有 $C_1^3\cdot C_1^2=6$ 個

b＝5 時 a 之選法 C_1^2，c 之選法 C_1^3，此種三位數有 $C_1^2\cdot C_1^3=6$ 個

b＝7 時 a 之選法 C_1^1，c 之選法 C_1^4，此種三位數有 $C_1^1\cdot C_1^4=4$ 個

b＝9 時 a 之選法 0，計 4＋6＋6＋4＝20 個